

M

II-1.

[illegible] Cantone / e Giovanni fortunato / [illegible] / fran.co Galigai / tartaglia / forestani / [illegible] /

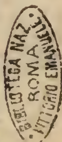
CHRISTOPHORI CLAVII

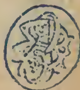
192

BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

EPITOME ARITHMETICAE Practicæ nunc denuo ab ipso auctore recognita.







PERMISSV SVPERIORVM

ROMAE Ex Typographia Dominici Basæ. 1585.



LECTORI S.



VM omnis me Mathe maticarũ rerũ cognitio delectat, tum vero ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capio voluptatem; idq; nõ solum ob eximiã quandã eius dignitatem, sed etiã, quòd sine Arithmetica, vt ego quidem existimo, nulla scientia, vt Plato audet dicere, neque ipsa hominum societas possit consistere. Plurima enim in mutuis commercijs, cõuentisque, quibus fere hęc hominũ coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expensi reddendæ, reposcendæve sint, tabulæ conficiendę, numerus æqualiter, vel inęqualiter, certa quadam proportione seruata, in plures partes diuiden- In Epinomide.

dus, ſumma ſubducenda; quibus in rebus circumuenire, & circum ueniri, ęque turpe, & perniciosum eſt: Itaque audacius illud quidē, ſed tamē verè dixit Plato, prudentiam, atque adeo humanitatē omnem è mundo eos tollere, qui Arithmeticam è vita tollant; cum ſine ea neque publicæ, neque priuatæ res conſtare poſſint. Iam vero cæteræ diſciplinæ ſic Arithmetica nituntur, vt hęc non videatur concidere poſſe, quin illæ caſu eodem labefactatæ corruant. Neque enim aut Aſtrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit ſua, vt non ſolum veritatē, ſed etiam voluptatē habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuerſam numerorum naturam animo penitus comprehenſam non habuerit: quòd ſi tantillū in rationibus

In Epinomide, & in 7. de Rep.

putan-

putandis lapſus fuerit, iam cætera-
rum rerum ingentem ruinam vi-
deas. Atque idcirco princeps inge
nij Plato hanc veſtibulum, & adi- In 7. de Rep.
tum ad reliquas doctrinas voluit
eſſe, non ea ſolum cauſa, quòd il-
læ ſine numeris nullæ ſint, verum
etiam quòd numerorũ tractatio-
ne niteſcit animus, & præparatur
ad reliquos doctrinæ ſatus reci-
piendos. Huius ego præſtantiſſi-
mæ ſciẽtiæ pulchritudine captus,
olim dederam me ad totá nume-
rorum naturam inueſtigandam,
vt cũ illam animo, ſcientiaq́; com
prehendiſſem, tum demum lite-
ris eam illuſtrarem, atque Arith-
meticę præcepta, Algebræq́; docu
menta, (rem ita non omnibus co-
gnitam) quibus in vita præclarius
vix aliquid reperias, ad certa quæ-
dam capita, & faciliores demon-

ſtrationes reuocarem, vt cuiuis aperta,& prompta eſſent. Res erat præclara illa quidem, ſed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur politius, cœpi, quæ ex multorum libris diſperſa collegeram, ſeparatim ad meum vſum in commentariolũ referre, vt videlicet ad manus mihi eſſent, meisq́; auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, ij aut multitudine præceptorũ rem perturbarunt, aut breuitate obſcurarunt, ſic, vt (in quo tamen de nullius exiſtimatione detractũ velim) quem in hac ſcientia magiſtrum, & ducem tyrones ſequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidiſſet, & in manus hominum veniſſet, ſummis precibus contenderunt à me

viri

viri graues, vt eum cum plurimis communicarem, quòd fore dicerent, vt is vtilissimus accideret cũ cæteris studiosis, tum vero ijs, qui nostras scholas frequentant: quorũ vtilitati nolle consultũ, nõ esse eius, qui sua, suaq; omnia Dei gloriæ, omniumq; commodis consecrasset. Horum ego precibus, & auctoritate inductus hunc libellũ typis mandare constitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo suscipias velim, quo damus: atque eo tantisper vtere, dum maius illud Arithmeticæ opus in lucẽ exeat, quod propediem, Deo iuuante, fore speramus. VALE.

Domus probationis Romanae

NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAP. I.

Numeratio quid.



NVMERATIO est cuiusuis numeri propositi per proprios characteres, ac figuras descriptio, atque expressio.

VTVNTVR autem Arithmetici decem characteribus, siue figuris ad omnium numerorum descriptionẽ, videlicet.

Decẽ figuræ numerorum.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

quarum priores nouẽ dicuntur significatiuæ. Quælibet enim illarum tot vnitates significat, quotum ipsa locum in apposita serie occupat. vt hæc figura 6. significat sex vnitates; quia sexto loco posita est: atque ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per se significat, diciturq́; cifra; auget tamen significationem, ac valorem aliarum figurarum, vt ex sequentibus perspicuũ fiet.

Quot loca sint in quolibet numero.

IN quolibet numero, qui pluribus figuris scribitur, tot dicuntur esse loca, quot sunt figuræ siue significatiuæ, siue non significatiuæ: primusq́; locus, seu prima figura est, quæ extrema est versus dextram; secundus vero locus, seu secunda figura est illa, quæ proxime primam consequitur versus sinistram, atque ita deinceps: adeo vt ille locus,

Prima figura, & vltima in quouis numero quæ sit.

seu

seu figura dicatur vltima, quæ primam sedem ad sinistram occupat. Vt hic. 4352. prima figura est 2. & vltima 4. Si tamen singulæ figuræ singulos numeros repræsentent, hoc modo. 4.3.5.2. prima figura erit 4. vltima vero 2. Cur autẽ ordo locorũ, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextra versus sinistrã, causa hæc est: quoniã à Phœnicibus inuẽta esse dicitur Arithmetica, qui scribere solẽt à dextra sinistram versus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Ordo locorũ in quouis numero cur à dextra sinistrã versus procedat.

QVAELIBET figura in primo loco posita seipsam simpliciter repræsentat, in secundo decies seipsam significat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in sexto centies millies, in septimo millies millies, atque hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine sese superent in decupla proportione, vt secundus primum, tertius secundum, quartus tertium, &c. Vt hic. 34567. prima figura 7. significat tantum septem vnitates: secunda 6. significat sexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, id est, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc est, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, siue decies millies 3. Itaq; totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & sexaginta septem. Eodemq; modo quicunque alius numerus exprimi poterit, si diligẽter notetur, quoties quælibet figura seipsã significat in varijs locis posita.

Quid quælibet figura in dato numero significet.

Figuræ in quouis numero se ordine superant in decupla proportione.

CAETERVM vt facilior reddatur numeratio, distribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram

Quid obseruandũ sit, vt datus numerus facile exprimatur.

tram ponatur punctum: Deinde procedendo versus sinistram, & omissis duabus figuris, supra sequentem figuram quarto loco positam aliud punctum statuatur: Et sic deinceps, omissis semper duabus figuris sine punctis, supra sequentem figuram punctum scribatur. Vt hic factũ esse vides.

. . . . . .
42329089562800

Qualibet enim figura sub quocunque puncto cum duabus antecedentibus versus sinistram constituit vnum membrum, ita vt singula membra ternis figuris constent, vltimo membro versus sinistram excepto, quod aliquando vnicam figurã habere potest, illam nimirum, quæ sub puncto collocatur; quemadmodum in proposito exemplo in quinque membra distributo contingeret, si vltima hæc figura 4. tolleretur: aliquando vero duas, vt in dato exemplo.

I T A Q V E *vt quicunque numerus enuncietur, satis est, si quodlibet membrum seorsum exprimatur, cuius prima figura vnitates significat, secunda denas vnitatum, & tertia centenas. Sed post pronunciationem cuiusuis membri apponenda est hæc vox* [*Mille*] *toties, quot membra sequuntur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primum ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde vero semper dicatur* [*millies*] *vt mox audies.*

I L L V D *porro membrum, quod vltimum est versus sinistram, primum est in enunciatione,*

& quod

& quod primum est ad partem dextram, in enunciatione est vltimum. Numerus ergò paulo ante propositus ita pronunciabitur. Primũ membrũ 42. si. Quadragintaduo millia, millies, millies, millies, ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quatuor membra, quæ hoc, quod ennunciatur, subsequuntur.

Secundum membrum 329. hoc modo. Trecenta, vigintinouem millia, millies, millies.

Tertium membrũ 089. ita. Octoginta nouem millia, millies.

Quartum membrũ 562. sic. Quingenta, sexagintaduo millia.

Quintum denique membrum 800. hoc pacto. Octingenta.

FACILIOR adhuc reddetur numeratio, si pro primo puncto ponatur 0. & 1. pro secundo puncto, & 2. pro tertio, & 3. pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo factum esse vides.

4 3 2 1 0
42329089562800

Hac enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda sit in cuiusque membri enunciatione. Toties enim proferenda est, quot vnitates in figura, quæ supra membrum pronunciandũ posita est, continentur.

IAM vero si more Italorum millenà millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortasse significantius, numerũ quemcunq; pro

positum

positum exprimemus, si in maiora eum membra distribuamus, hoc, qui sequitur, modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur 0. *Deinde, omissis quinque figuris intermedijs, collocetur* 1. *supra sequentem figuram, quæ septimum locũ occupat. Post hanc, omissis rursus quinque figuris, scribatur* 2. *supra figuram, quæ tertiũ decimum occupat locũ. Atque ita deinceps, omissis semper quinque figuris, ponatur* 3. 4. 5. *&c. Vt hic in eodem exemplo factum est.*

2 1 0
42329089562800

Quodlibet membrum cõtinet sex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam potest habere figuram, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinque tantum) quæ omnes simul enunciandę sunt, & post enuuciationem cuiusuis membri toties dictio [*Millio*] *adděda, quot vnitates sũt in figura supra mẽbrum posita, primo quidem in recto, deinde vero semper in obliquo. Vt autem quodlibet membrum facilius enuncictur, ponẽdum erit punctum sub quarta eius figura, quod significabit, locum ibi millenarum esse. Igitur superius exemplum ita proferendum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta vigintinouem millia millionum, octogintanouem milliones: quingenta sexagintaduo millia, octingenta.*

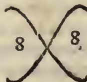
ADDI-

ADDITIO INTEGRORVM NVmerorum. Cap. II.

ADDITIO est duorum, vel plurium numerorum in vnam summam collectio. Additio q̃d

NVMERI addendi ita sunt collocandi, vt vno sub altero posito, primæ figuræ inter se respondeant, item secundæ inter se, & tertiæ, & quartæ &c. adeo vt defectus figurarum, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocādi erunt, vt hic apparet. Numeri addendi quo pacto sint collocandi.

710654
8907
56789
880
777230



DVCTA deinde linea sub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figuræ inter se, & numerus compositus, si vnica figura scribi potest, sub primis figuris infra lineam ponitur; si vero duabus figuris scribendus est, ponitur sola prima earum, & reliqua seruatur, vt deinde secundis figuris inter se addendis adijciatur. Post hæc adduntur secundæ figuræ eodem modo, addita prius illa, quæ seruata est, si qua tamen seruata sit, itemque tertiæ, quartæ, & aliæ. Quòd si ex additione vltimarum figurarum numerus componatur duabus figuris scribendus, ponēdæ sunt ambæ sub linea, nulla retēta, eo quòd tunc tota additio peracta sit. Verbi gratia. In primis figuris propositi Quo pacto fiat additio

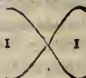
exem-

exempli 0. & 9. faciunt 9. addo 7. fiunt 16. addo 4. fiunt 20. Pono ergo sub primis figuris 0. & seruo 1. Deinde in secundis figuris, ex 2. (quam figuram seruaueram) & 8. fiunt 10. addo 8. fiunt 18. addo 5. fiunt 23. Pono ergo figurã 3. sub secundis figuris, & retineo 2. Post hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figuram retinueram) & 8. fiunt 10. addo 7. fiunt 17. addo 9. fiunt 26. addo 6. fiunt 32. Pono ergo 2. sub tertijs figuris, & retineo 3. Rursus in quartis figuris, ex 3. (quæ figura retẽta erat) & 6. fiũt 9. addo 8. fiunt 17. addo 0. fiunt 17. Pono ergo 7. sub quartis figuris, & seruo 1. quam addo quintis figuris, efficioque 7. Pono igitur 7. sub dictis figuris, & nihil reseruo. Postremo quia in vltimo loco sola hęc figura 7. reperitur, pono eam sub linea, absolutaque erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorum addendorum inter se addidimus ab inferioribus versus superiores ascendẽdo, ita quoq; colligi possunt in vnã summã, si à superioribus versus inferiores descendatur.

Quid faciẽdũ sit, quãdo ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris scribendus.

QVOD si quando ex additione figurarum vnius loci excreuerit numerus tribus figuris scribendu, ponẽda erit prima figura sub illo loco, & reliquæ duæ figuris sequentium locorum addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & secunda figuris alterius loci:

6008
5009
4009
308
239
108
108
309
4128
3009
209
308
23752



aut

aut certe numerus duabus illis figuris retentis expressus sequentis loci figuris addendus. Vt in apposito exemplo, quoniam ex primis figuris colligitur numerus hic 102. scribenda erit figura 2. sub primo loco, & figura 0. addenda figuris secundi loci, figura vero 1. figuris tertij loci. Vel totus numerus retentus 10. addendus figuris secundi loci, vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. sub secũdo loco ponatur, & figura 1. figuris tertij loci addatur, &c. vtroque enim modo idem semper numerus colligetur. Examinatum autem vides hoc exemplum per abiectionem 9. de quo examine mox dicemus.

RECTE *porro feceris, quãdo sunt multi numeri addendi, si eos in plures classes distribuas, & ex singulis classibus singulas summas colligas. Nã si demum hasce summas in vnam redigas summã, habebis summã ex omnibus datis numeris collectam, vitabisque molestiam, quę in tot figuris in vnam summam colligendis necessario occurrit. Vt si proximum exemplum in quatuor hasce classes* Quid faciẽdum sit, quãdo multi numeri addẽdi sũt.

6008	308	108	3009
5009	239	309	209
4009	108	4128	308
15026	655	4545	3526

partiaris, & singularum summas, 15026. 655. 4545. 3526. in vnam summam redigas, efficies summam, 23752. eandem, quam prius collegeramus

mus, vt hic apparet. Perspicuum autẽ est, hoc posteriori modo nõ tam facile errorem posse committi, quã priori, quòd in hoc non tot figuræ, quòd in illo, simul addantur.

15026
655
4545
3526
23752

Prima probatio additioni p 9.

POST absolutam additionem solent Arithmetici eã examinare, sicut & alias operationes, quæ sequuntur, num recte facta sit, an non. Quod quatuor modis fieri potest in additione. Primum per abiectionem nouenarij, hoc pacto. Reijciantur 9. ex omnibus numeris addẽdis, quoties fieri potest, & quod reliquum est, ponatur seorsum. Deinde ex summa collecta reijciantur quoque 9. quoties fieri potest, & quod reliquum est, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquum fuit, æquale est, recte instituta fuit additio: Si vero inæquale, non recte. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in superiori exẽplo relictum fuisse numerum 8. post abiectionem numeri 9. tã ex omnibus numeris addendis, quàm ex summa collecta, qui numerus 8. collocatus est in cruce quadam in hunc finem constructa.

Qua ratione ex quouis numero reijciantur facile 9. quoties fieri potest.

CAETERVM, vt facile abijciantur 9. satis est, vt figuræ numerorum, ac si omnes primum occuparent locum, inter se addantur, & cum primum summa fuerit 9. aut excesserit 9. ita vt duabus figuris scribatur, reijciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter se addantur, & summa hæc cum sequẽti figura addatur eodem modo, &c. Est enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt si figuras cuiuscunque numeri inter se addas, & ex summa reij-

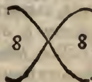
Mirabilis proprietas nouenarij.

cias

cias 9. vel certe, si summa hæc duabus figuris scribitur; duas has figuras in vnam summam colligas, tantundem relinquatur, vel componatur, quantum relinqueretur, si reijceres 9. toties ex toto numero; quoties potes. Vt si ex hoc numero 38. reijciantur 9. quoties id fieri potest, nempe quater, remanent 2. quater enim 9. faciunt 36. Quòd si dicas, 3. & 8. (sumendo figuras eiusdem numeri 38. seorsum) faciũt 11. & reijcias 9. Vel certe dicas. 1. & 1. faciunt 2. (sumendo etiam figuras huius numeri 11. proxime compositi seorsum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoque si ex hoc numero 41. reijciãtur 9. quoties fieri potest, nempe quater, remanent 5. Et si dicas, ex 4. & 1. (sumendo figuras numeri 41. seorsum) fiunt etiam 5. Denique ex numero 78. si abijciantur 9. quoties fieri potest, nempe octies, relinquuntur 6. Et si dicas, 7. & 8. faciunt 15. reijciasque hinc 9. Vel certe dicas, 1. & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantum prius reliquũ fuit. Eademque ratio est de cæteris.

ITAQVE vt videas, qua ratione examen additionis instituendum sit, examinabimus primum exemplum hoc modo.

```
710654
  8907
 56789
   880
——————
777230
```



7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id est, 5.

Nam 1.& 4.faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, si 9.ex 14. reijcerentur, vt dictum est. Additis 5.ad illa 5.fiunt 10.id est, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8.fiunt 13.hoc est, 4. Additis 7. fiunt 11. (Nam 9.semper omittuntur, cum sint perpetuo abijcienda.) id est, 2. Additis 5.fiunt 7. Additis 6.fiunt 13.hoc est, 4. Additis 7.fiunt 11. id est, 2. Additis 8.fiunt 10. id est, 1. Additis 8. fiunt 9. id est, 0. Nam 9.reijcienda sunt. Remanet autem 8. quæ in altera parte crucis colloco. Deinde in summa producta, ex 7.& 7.fiunt 14.id est, 5. Additis, 7.fiunt 12.id est, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandẽ additis 3.fiunt 8.vt prius, quæ statuo in opposita parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui post abiectionem 9.reliqui fuerunt.

Probatio per 9.fallax est, & quare fallax sit.

QVONIAM *vero hac ratione non reijciuntur 9.quoties fieri potest, sed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur residuũ, quod remaneret, si omnia 9.reijcerentur, fit, vt hoc examen per abiectionem 9. institutum fallax sit; vt in hoc exẽplo apparet. Nam summa collecta falsa est, & nihilominus*

25	7
30	3
64	1

1 ✕ 1

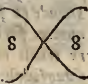
examen per 9.institutum indicat, eam recte collectam esse, cum vtrobique Vnitas supersit. Quòd si reijciantur 9. quoties fieri potest, statim apparebit falsitas summæ collectæ. Sæpius enim reijcientur 9.ex summa, quàm ex numeris additis. In summa enim hac 64.continentur 9. septies, superestq́ vnitas, propterea quòd septies 9. sunt 63.

At

At in numero 25. continentur 9. bis, & supersunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter, & supersunt 3. quę etiam ex parte dextra noto. Itaque ex numeris additis reijciuntur 9. quinquies, & supersunt 7. & 3. in quibus adhuc semel continentur 9. superestq; vnitas; adeo vt vere sexies tantum reiecta sint 9. ex numeris additis, ex summa vero septies. Vnde mirum non est, summam esse falsam, quamuis semper reliqua fuerit vnitas. Vera autẽ summa esset hæc 55. in qua continentur 9. sexies, & superest vnitas, quemadmodum in numeris additis.

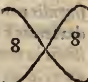
EODEM *pacto, si quis post summam recte collectam permutaret aliquas figuras, vel interponeret figuris siue summæ, siue numerorum addendorum hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel hasce duas 7. 2. aut 6. 3. aut 4. 5. aut 8. 1. semper indicaret examen, summam adhuc recte esse collectam: quod tamen falsum est. Nam postquam hæc additio recte cum suo examine instituta fuerit, si quis per calumniam ita permutaret summam 1565. adhuc haberet examen suam vim, & tamen summa vera non esset.*

1425
230
1655



Idem dices, si ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: vel certe interponeret hanc figurã 9. aut 0. vt hic apparet.

14925
2309
10655



HAEC *cum ita sint, merito quis roget, cur*

Cur ab Arithmeticis probatio per 9. adhibeatur, cũ fallax sit.

ab Arithmeticis hæc probatio per 9.adhibeatur. Cui respondendum est, licet per calumniam hæc probatio ostendatur esse vitiosa, vt in proximis exemplis patuit, non immerito tamen à peritis Arithmeticis eam vsurpari. Nam nemo, (nisi quis dedita opera errare velit) talem errorẽ committet, vt examen istud locum habeat, sed solum vna, aut altera vnitate à scopo aberrabit; ita vt facile tunc examen hoc ostendat, errorem fuisse commissum, indicetque proinde, corrigendam esse additionẽ. Quis enim ita insanus fuerit, vt vltimam illã summam ex primis duobus numeris colligat? Denique nisi de industria numeri ita disponantur, vt reiectis 9. semper idem residuum sit, vix aut raro admodũ continget, vt examen istud succedat, nisi quãdo in additione erratũ nõ fuerit.

Secũda probatio additionis p 7.

ALIO modo fit examen per abiectionem septenarij, hoc pacto. Reijciantur 7. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & id, quod superest, seorsum ponatur in vna parte crucis. Deinde ex summa collecta reijciantur quoque 7. quoties fieri potest, ac residuum in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori residuo fuerit æquale, recte facta est additio; si vero inæquale, non recte. Reijcienda autem sunt 7. ex singulis numeris addendis seorsum, residuaque ad dexteram è regione ipsorum locanda, & ex his residuis in vnam summam collectis etiam abijcienda 7. atque hoc vltimum residuum in vna parte crucis ponendum. Cæterum non eodem modo reijcienda sunt 7. quo abijcienda esse 9. diximus, cum

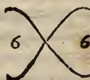
hic

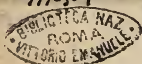
hic numerus 7. illam proprietatem nouenarij non habeat: sed assumendæ sunt duæ figuræ primæ ad sinistram, ac si prior earum denas, & posterior vnitates significaret, dummodo prior minor sit, quàm 7. (Nam si esset 7. vel maior, reijcienda forẽt 7. ex illa sola.) & ex eo numero, quem duæ illæ figuræ referunt, abijcienda 7. quoties fieri potest, & residuum pro denis accipiendum, eique sequens figura addenda pro vnitatibus, atque ex hoc numero, quem residuum, & sequens figura exprimunt, iterum abijcienda 7. quoties fieri potest, atque ita deinceps. Ut ex numero 2379. ita reijcientur 7. Ex 23. si ter abijciantur 7. remanent 2. Item si ex 27. (Nam figura 2. relicta, & sequens figura 7. constituunt hunc numerum 27.) reijciantur ter 7. relinquuntur 6. Si tandem ex 69. (qui numerus constituitur ex residuo 6. & figura 9.) reijciantur 7. quoties fieri potest, remanent 6. Qui numerus etiam reliquus fuisset, si omnia 7. ex dato numero fuissent abiecta. Eodem modo ex hoc numero 783. ita abijcientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum est, & ex 8, reijciuntur 7.) abijciantur 7. remanet 1. Rursus si ex 13. reijciantur 7. remanent 6. atque ita de cæteris.

Quo pacto reijcienda sint 7. ex quolibet numero.

ITAQVE hac ratione superius examplũ examinabitur.

710654	0
8907	3
56789	5
880	5
777230	





Omissa figura 7. si ex 10. abijciantur 7. remanent 2. Item si ex 36. abijciantur 7. remanet 1. Abiectis vero 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri, ducta prius linea, quę numeros addendos distinguat à figuris ad dexteram collocandis. Deinde in secundo numero abiectis 7. ex 8. remanet 1. abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoque 7. ex 50. remanet 1. Denique abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dexteram repono. Rursus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omissa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis denique 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto denique numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7. ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40 remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5. 5. 3. & 0. efficiunt 13. ex quibus si abijciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hisce residuis facilius reijcientur 7. si dicatur, 5. & 5. efficiūt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6. quemadmodum supra de abiectione 9. dictum est. Postremo in summa, omissis 7. 7. 7. si ex 23. abijciantur 7. remanent 2. Item si ex 20. abijciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponenda.

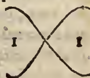
Probatio p 7. fallax est, sed minus, quàm probatio per nouem, & quare.

VERVM quemadmodum examen per abiectionem 9. fallax est, vt diximus, ita quoque hoc per abiectionem 7. vitiosum esse deprehenditur: quia non consideramus, an toties reijciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex summa, necne; sed solum

solum, an idem residuum vtrobique reperiatur, an non. Nihilominus tamen non sine ratione huiusmodi examen ab Arithmeticis adhiberi solet, quemadmodum & illud prius per abiectionem 9. institutum, ob rationem supra dictam: quia, nisi quis per calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem residuum vtrobique reperietur, nisi recte facta sit additio: Et multo quidem rarius in hoc, quàm in illo examine per 9. instituto; propterea quòd non ita simpliciter reijciuntur 7. vt 9. sed maiori quodam artificio: vt non tam facile quis alium possit decipere, aut ab alio decipi.

IN hoc apposito exemplo additio vitiosa est, et tamen examen per abiectionem 7. indicat, eam rite esse institutam.

203	0
134	1
344	



PROPOSITA autem hæc tabella docet, ex quibusnam numeris abiecta 7. nihil relinquunt, vt examen istud per 7. reddatur facilius pro ijs, qui parum in numeris sunt exercitati. Cuius vsus hic est. Si numerus duabus figuris scriptus, ex quo debent reijci 7. in hac tabella reperitur, nihil supererit post abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proxime minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propositum relinquitur post abiectionem 7. Vt si numerus pro-

7	0
14	0
21	0
28	0
35	0
42	0
49	0
56	0
63	0

positus sit 69. sumendus erit numerus 63. in tabella, qui sex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item si propositus numerus sit 37. accipiẽdus erit in tabella numerus 35. qui duabus vnitatibus superatur à 37. Reiectis igitur 7. ex 37. supersunt 2. Atque ita de cæteris.

Tertia probatio additionis per additionẽ.

TERTIO hac ratione Arithmetici additionem factam examinare solent. Si additio facta est ab inferioribus figuris versus superiores, instituunt eandẽ à superioribus figuris versus inferiores, vel contra: Et si posteriori via eadem prorsus summa colligatur, quæ priori inuenta est, non dubitant, quin recte sit facta additio, propterea quòd incredibile quodammodo sit, si priori modo error aliquis esset commissus, eundem prorsus posteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorum inter se additæ sint posteriori via, quàm priori. Nam si errauero in additione harũ figurarum 5. 2. 9. hoc modo dicendo, 5. & 2. faciunt 7. additis 9. fiunt 15. non tam facile in eundem errorem incidero, si è contrario eas inter se addam. Dicã enim 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiunt 16. quia operatio aliquo modo variatur.

POTEST probatio hæc per additionem ita quoque institui. Diuidãtur numeri addendi in duas, aut plures classes, & singularum summæ colligãtur. Nam si ex hisce summis vnam summã conficias, necesse est, summã hanc æqualẽ esse summæ prius collectæ, si erratum nõ est. Vt si primum exemplum in hæc duo membra distribuantur, & eorum summæ collectæ in vnam redigantur summam

710654		56789
8907		880
719561		57669
	719561	
	57669	
	777230	

mam, vt hic factum est, prodibit eadem summa, quæ prius.

QVARTO & vltimo examinari solet additio per subtractionem, hac ratione. Quando duo numeri sunt additi, subtrahatur vteruis eorum ex summa: quod quo pacto fiat, capite sequenti docebimus. Si enim numerus ex hac subtractione relictus ęqualis fuerit alteri numero addito, argumento est, nullum peccatum in additione fuisse cõmissum. Nam si ex 12. & 20. fiunt 32. necesse est, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando vero plures numeri sunt additi, subtrahatur vnus eorum ex summa, & reliqui omnes in vnam summam colligãtur. Nam si hæc summa illi residuo fuerit æqualis, recte facta erit additio. Vel certe, subtracto primo numerorum addendorum ex summa, subtrahatur ex residuo secundus, & ex hoc residuo tertius, & ita deinceps, ultimo excepto. Si enim ultimum residuum ultimo numerorum addendorum æquale fuerit, dubium non est, quin additio rectè facta sit. Atque hoc examen certissimum est, licet sit alijs paulo longius.

Quarta pbatio additionis per subtractionem.

SVB-

SVBTRACTIO INTEGRORVM numerorum. Cap. III.

Subtractio quid.

SVBTRACTIO est minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali, subductio.

Vter duorū numerorū maior sit, quo pacto cognoscat.

FACILE autem cognosces, vter duorum numerorum maior sit, ex vltimis eorum figuris. Cuius enim figura vltima maior est, ille numerus maior etiam erit. Ut horum duorum numerorū superior maior est inferiore, quia vltima eius figura 3. maior est, quàm 2. vltima figura inferioris.

3001234.
2986789.

Quòd si vltimæ figuræ duorū numerorum sint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior est. Et si penultimæ etiam figuræ sint æquales, ille maior erit numerus, in quo prius occurret maior figura, vt in his exēplis semper numerus superior inferiore maior est.

45078. 700001000.
44986. 700000999.

Subtrahendus numerus quo pacto locandus sit.

NVMERVS subtrahendus sub eo, à quo fieri debet subtractio, ita collocandus est, vt prima figura primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. respondeat: adeo vt defectus figurarum in numero subtrahendo, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Ut si numerus 40236. *ex numero* 3271589. *subducendus sit, collocandus erit ille sub hoc, vt hic apparet.*

3271589
40236

3231353

DVCTA

DVCTA deinde linea sub duobus illis numeris, subtrahuntur singulæ figuræ inferioris numeri à singulis figuris superioris numeri, initio facto à primis figuris; & residua sub linea collocantur eo ordine, quo facta est subtractio. Quòd si in superiori numero aliquę figure nō habeant respondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil subtrahatur, reponēdæ illæ erunt sub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. sub linea collocanda. Itē subductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5. relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At subductis 4. ex 7. remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3. nihil subtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine sub linea. Subtractio quomodo fiat.

QVANDO autem figura aliqua inferior maior est superiore sibi respondente, ita vt subtractio fieri non possit, seruanda erit hæc regula. A proxima figura superiori versus sinistram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates significabit respectu illius figuræ, à qua subtractio fieri nō potest. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris scribendus; à quo detrahatur illa figura inferior maior: sed tunc illa figura, à qua mutuo accepta est vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quòd si proxima illa figura superior sit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura versus sinistrā, quæ vnitas significabit 100. vnitates respectu illius figuræ, à qua subtractio nō potest fieri: sed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta Quid agendum sit, quã figura inferior maior est, quàm superior.

pta est vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoque si plures huiusmodi figuræ 0. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandę essent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perspicua.

4500026304827
3929034567892

570991736935

PRIMVM subductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde quia 9. detrahi non possunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rursus quia 8. ex 7. (superior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantũ 7.) subtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatẽ à 4. & sic subductis 8. ex 17. remanent 9. Post hęc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non possunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. post 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. respectu figuræ 3. à qua non potest fieri subtractio, & nos indigemus tantum 10. necesse est, vt si à 100. mutuemur 10. relinquãtur 90. Hinc fit, vt figura 3. valeat tantum 2. & supra 0. reponenda sit animo figura 9. quæ significat 90. respectu figuræ, à qua subtractio fieri non poterat. Itaque subductis 7. ex 13. remanent 6. Et subductis 6. ex 9. (supra 0. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2.

(Nam

(Nam figura superior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusq; 5. ex 12. vt supersint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rursus 3. ex 2. non possunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5. Sed cũ hæc vnitas valeat 10000. respectu figuræ 2. à qua subductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantũ 10. necesse est, vt si à 10000. mutuemur 10. remaneãt 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat solũ 4. & supra singulas cifras cogitatione reponenda sit figura 9. hoc modo, 999. Hę namque figuræ 999. significant 9990. respectu figuræ 2. à qua subductio fieri non poterat. Itaque subductis 3. ex 12. remanent 9. Et subducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. supra 10. diximus cogitandam esse.) remanent 9. Et subductis 9. ex 9. (quam etiam figurã 9. supra 0. imaginamur) remanet 0. Item subtractis 2. ex 9. (supra 0. namque reponenda quoque animo est figura 0.) supersunt 7. At vero quoiam 9. subtrahi non possunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt supersint 5. Postremo subductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0. quæ figura 0. quia vltima est in hoc exemplo, nihilq; propterea significat, omittenda est.

HAC regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior est superiore, accipiatur

Facilior ratio subtractionis, qn figura inferior superiore maior est.

piatur differentia inter ipsam, & 10. atque huic differentiæ addatur superior figura, à qua subtractio non poterat fieri, aggregatumq́; scribatur sub linea. Hoc enim aggregatum relinqueretur, si figura illa maior auferretur ex numero composito ex 10. & figura illa superiore, à qua nō potest fieri subtractio, non secus, ac si vnitas fuisset mutuo accepta: cum figura illa maior primum subtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figuram, deinde residuo, siue differentiæ huic superior figura addatur. Postea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex superiore figura, à qua mutuo sumpta est implicite vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori versus sinistram vnitatem, & hoc aggregatum ex superiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitate) subducemus. Eadem enim semper differentia erit inter inferiorem, ac superiorem figuram, siue ex superiore auferas vnitatē, & inferiori nihil addas, siue ex superiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adijcias. Vt propositis hisce duabus figuris 7. 4. si ex 7. tollatur vnitas, erit 2. differentia inter residuū 6. & 4. Et si ex 7. nihil dematur, adijciatur autem vnitas ad 4. eadem differētia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotiescunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex superiori non potest subtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ versus sinistram. Sed hęc omnia clariora ficnt ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

PRI-

4500026304827
3929034561892

570991736935

PRIMUM subductis 2. ex 7. supersunt 5. Quia vero 9. subtrahi non possunt ex 2. subtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia est inter 10. & 9.) adijciemus 2. vt habeamus 3. pro residuo sub linea ponendo. Hoc facto, statim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniam rursus ex 8. non possunt subduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ unitati (quæ rursus differentia est inter 10. & 9.) addemus 8. ut habeamus 9. collocanda sub linea. Quo peracto, statim inferiori figuræ 7. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. efficiemusque 8. Quæ quoniã ex 4. demi nequeunt, auferemus 8. ex 10. & residuo 2. (hoc est, differentiæ inter 10. & 8.) adijciemus 4. ut fiant 6. reponenda infra lineam. Deinde statim inferiori figuræ 6. adiungemus 1. propter differentiam illam inter 10. & 8. efficiemusque 7. Quæ, quoniam ex 0. subtrahi nequeunt, subduco ex 10. & residuo 3. (id est, differentiæ inter 10. & 7.) addo 0. efficioque 3. ponenda sub linea. Rursus inferiori figuræ 5. addo 1. propter illam differentiam inter 10. & 7. efficioque 6. Quæ, quoniam subduci nequeunt ex 3. detraho ex 10. & residuo 4. (id est, differentiæ inter 10. & 6.) addo 3. efficioq́; 7. infra lineã scribenda. His peractis, statim inferiori

riori figuræ 4. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 6. facioque 5. quibus subductis ex 6. supereſt 1. Quia vero in hac subductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5. cum 5. subduci potuerint ex 6. non addo. 1. inferiori figuræ 3. sed eam, quoniam subduci non poteſt ex 2. subtraho ex 10. & residuo 7. (siue differentiæ

4500016304827
3929034567892

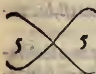
5709917369 35

inter 10. & 3.) addo ad 2. facioq; 9. locanda sub linea. Post hæc statim figuræ inferiori 0. addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficioque 1. Et quoniam 1. subtrahi non poteſt ex 0. demo 1. ex 10. residuoque 9. (id eſt differentiæ inter 10. & 1.) addo 0. efficioque 9. infra lineã reponenda. Poſtea iterum ſtatim addo 1. figuræ inferiori 9. propter illam differentiam inter 10. & 1. vt habeam 10. quæ, quoniam ex 0. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. residuoque 0. (siue differentiæ inter 10. & 10.) addo 0. facioque 0. pro residuo sub linea collocando. Rurſus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 10. efficioque 3. quæ, cum ex 0. subduci nequeant, subtraho ex 10. residuoque 7. (nempe differentiæ inter 10. & 3.) addo 0. facioque 7. collocanda sub linea. Præterea mox addo 1. ad figuram inferiorem 9. propter differentiam il-

lam

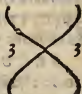
lam inter 10. & 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5. non possunt detrahi, aufero ex 10. ac residuo 0. (differentiæ nimirum inter 10. & 10.) addo 5. efficioque 5. pro residuo sub linea reponendo. Postremo statim figuræ inferiori 3. adijcio 1. propter illam differentiam inter 10. & 10. vt habeam 4. quæ subducta ex 4. relinquunt 0. quam figuram 0. quoniam superuacanea est in principio numeri ex parte sinistra, omittemus, cum posita frustra locum occuparet.

per 7. Aliud Exemplum. *per 9.*



40001341
6782310

3932311|5



IN hoc exemplo, quoniam, ablatis omnibus figuris inferioribus ex superioribus, vnitas adijcienda esset sequēti figuræ inferiori, quæ nulla est, reponemus eam in sequentem locum: quę, quoniam auferri nequit ex 0. detrahēda erit ex 10. & residuum 9. infra lineam ponendum; Ac rursus vnitas sequenti loco adijcienda, atque ex 4. auferenda, vt habeatur residuum 3. sub linea collocandū.

QVOD si numerus ex pluribus numeris, vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero sint subducendi, colligendi prius erunt plures numeri illi, à quibus fieri debet subtractio, in vnam summam; Itemque plures illi, qui subtrahi debent, Quando numeri sunt plures quid agendum.

inter se addendi, priusquã subtractio instituatur.

Prima probatio subtractionis per 9.

EXAMEN subtractionis quadruplex est. Primum fit per abiectionem 9. Si enim ex superiori numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 9. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 9. & residuum collocetur in vna parte crucis, necesse est, vt idem numerus relinquatur, si abijciantur 9. ex numero subtracto, & ex relicto, quoties fieri potest, nisi in subtractione erratum sit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram, residuum semper esse 3. siue 9. abijcias, quoties potes, ex numero 4000134. à quo facta est subtractio, siue ex numeris 67823. 3932311. simul, quorũ ille subtractus est, hic vero reliquus fuit ex subtractione.

Secunda probatio subtractionis per 7.

SECVNDVM examen fit per abiectionem 7. Nam si ex numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 7. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 7. & residuum ponatur in vna parte crucis, necesse est, si subtractio recte facta est, vt idem numerus relinquatur, si reijciantur 7. ex numero subtracto, ponendo residuum ad dextram illius, & ex numero relicto, ponendo etiam residuum ad dextrã illius, ac tandem duo hæc residua ad dextram collocata in vnam summã colligantur, & ex ea reijciantur 7. si reijci possunt. Ita in superiori exemplo, reiectis 7. quoties fieri potest, ex numero 4000134 relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823. remanet 0. & abiectis 7. ex 3932311. supersunt 5. quæ addita ad 0. faciunt quoque 5. vt in cruce ad

sinistram

ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet.

CAETERVM vtrumque hoc examen fallax eſſe poteſt, ſi quis per calumniã numeros permutet, aut alios numeros apponat, quemadmodũ in additione diximus.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus, à quo ſubtractio facta eſt. vt in hoc exemplo vides. Tertia probatio ſubtractionis per additionem.

Numerus, à quo fit ſubtractio.	60123.
Numerus ſubtractus.	45678.
Numerus reſiduus.	14445.
Summa ex numero ſubtracto, & reſiduo compoſita.	60123.

QVARTVM examen fit per ſubtractionem. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduum 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic apparet. Quarta probatio ſubtractionis per ſubtractionem.

60123
14445
45678

HAEC poſteriora duo examina certiſſima ſunt, nullamq́; admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRO-rum numerorum. Cap. IIII.

Multiplicatio quid.

MVLTIPLICATIO est ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipsorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. sexies. quo pacto semper accipientur 30. atque huiusmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, siue ductu vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatẽ complectitur, vt in dato exemplo manifestum est. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque describi posse. Multiplicatio duorum numerorum est inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorũ contineat, quoties alter vnitatem continet.

VT expedite omnis multiplicatio fiat, necesse est nosse, qui numerus producatur ex ductu, siue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quãuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim si bene tenueris, nullam in multiplicatione senties difficultatem, aut laborem. Id quod assiduo exercitio magis discitur, quàm vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inseruiet sequens tabula, quę Pythagorica dici solet, ea fortassis de causa, quòd Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe discipulos suos in ea mirificè exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

CONSTRVCTIO huius tabulæ perfacilis eſt. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vſque ad 9. Vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturq; per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c. Ita quoque tertia linea initium ſumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atque eodem modo reliquæ lineæ compoſitæ ſunt. Quælibet enim per continuã additionẽ eius numeri, à quo incipit, progreditur. Cõſtructio tabulæ Pythagoricæ.

VSVS autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, et in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi concurſu numerum Vſus tabulæ Pythagoricæ.

ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter se productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & sic de cęteris.

Regula multiplicādi figuram in figurā.

QVOD si huiusmodi tabula in promptu nō sit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura sub altera, & vtriusq; distantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hę distantiæ inter se multiplicentur. Productus enim numerus, si vnica figura scribitur, dabit primā figurā summæ producēdæ ex figurarū multiplicatione; si vero duabus figuris scribitur, seruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura summæ producendæ. Secunda autem figura eiusdem huius summę habebitur, si alterutra distantia ab altera figura detrahatur, & residuo figura denarum reseruata addatur, si qua seruata est: Vel certe si figurę propositæ inter se addantur, addita prius figura denarum reseruata, si qua seruata est, dabit prima figura huius aggregati (reiecta secunda figura tanquam superuacanea) secundam figuram summæ producendę. Exemplis res fiet illustrior.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2

IN primo exemplo figuræ multiplicādæ sunt 9. & 8. earumque distantiæ à 10. sunt 1. & 2. quę inter se multiplicatæ, (erit autem multiplicatio

distan-

distantiarum à 10. facillima, cum minores sint, quàm figuræ multiplicandæ. De his enim regula hæc intelligenda est) dicendo semel 2. vel bis 1. faciunt 2. quæ sub distantijs scribo pro prima figura summæ producendæ. Ablata autem distantia 2. ex 9. vel distantia 1. ex 8. relinquũtur 7. quæ scribo sub figuris pro secunda figura summæ producendæ. Quam secundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod est 17. relicta secunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

IN secundo autem exemplo figuræ propositæ sunt 8. & 8. quarum distantiæ à 10. sunt 2. & 2. His inter se multiplicatis, dicendo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura summę producendę. Dempta autem vtrauis distantia ex 8. supererunt 6. pro secunda figura; quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod est 16. relicta secunda 1. tanquam superuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter se multiplicatæ faciunt 64.

IN tertio denique exemplo figurę datę sunt 7. & 6. quarum distantię à 10. sunt 3. & 4. Hę inter se multiplicatę, dicendo, ter 4. vel quater 3. faciunt 12. Prima ergo figura summę producendę erit 2. secunda vero figura 1. seruanda erit. Deinde ablata distantia 4. ex 7. vel distantia 3. ex 6. supersunt 3. quibus si addatur vnitas, quam seruauimus, fient 4. pro secunda figura summę producendę: quam etiam figuram dabit prima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate seruata,

quod est 14. omissa prorsus secunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6. per 7. Eadem ratio in cęteris est, dummodo duę figurę propositę inter se additę superent 10. Alias distantię illarum à 10. maiores essent ipsis figuris, ac proinde facilius multiplicarentur figurę, quàm distantię. Rectius tamē feceris, si vsu, & exercitatione memoriter edíscas huiusmodi multiplicationes figurarum inter se, quàm vt vel ad tabulam Pythagoricam, vel ad hanc regulam confugias.

Qua ratione collocandi sint numeri inter se multiplicandi.

IAM vero propositis duobus numeris inter se multiplicandis, scribēdus est minor sub maiore, ita vt prima figura respondeat primę figurę, & secunda secundę, &c. vt in additione, & subtractione diximus. Quod tamen necessarium non est, cum etiam maior sub minore scribi possit, dicto tamen ordine figurarum seruato. Vt si multiplicanda sint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus sit magis vsitatus.

4300678.	*Vel.*	600394.
600394.		4300678.

SED doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam solam figuram multiplicandus sit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum debeat multiplicari.

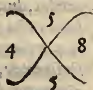
QVANDO ergo numerus aliquis per vnā tantum figuram multiplicandus est, solet semper

figura

figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ numeri numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. *multiplicandus proponatur per* 8. *ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autem fiet ſi figura* 8. *multiplicetur per omnes figuras numeri* 600394. *incipiendo a dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſinguloſque numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribendo; ita tamen, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribẽdus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequenti producto adijcienda, hoc videlicet modo.*

Quomodo numerus per vnam figurã multiplicetur.

600394.
8.
4803152.



Primum multiplico 8. *per* 4. *dicendo, octies* 4. *faciunt* 32. *pono* 2. *ſub* 4. *& ſeruo* 3. *Item octies* 9. *faciunt* 72. *& additis* 3. *ſeruatis, fiunt* 75. *pono* 5. *ſub* 9. *& ſeruo* 7. *Item octies* 3. *faciunt* 24. *& additis* 7. *ſeruatis, fiunt* 31. *pono* 1. *ſub* 3. *ſeruoque* 3. *Deinde octies* 0. *facit* 0. *& additis* 3. *ſeruatis, fiunt* 3. *quæ pono ſub* 0. *nihilque reſeruo. Rurſus octies* 0. *facit* 0. *cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendum eſt. Pono ergo* 0. *ſub* 0. *nihilque reſeruo. Denique octies* 6. *faciunt* 48. *quibus, quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum ſub linea, quia multiplicatio ad finem perducta eſt, cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per* 8. *Itaque ſi totum numerum* 600394. *multiplicemus per* 8. *procreabimus hũc nume-*

numerum 480312. Atque hoc modo quemcumque numerum per quamuis figurā multiplicabis.

Quomodo numerus per numerum pluribus figuris scriptum multiplicētur.

SI vero numerus per numerum sit multiplicandus, ducatur sub ipsis dispositis, vt dictum est, linea recta. Deinde singulæ figuræ inferioris numeri per singulas figuras numeri superioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc solum diligenter obseruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri superioris mutiplicata collocetur sub illa figura inferioris numeri, per quā superior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiusdem figuræ numeri inferioris per alias figuras superioris numeri producti statuantur suo ordine deinceps versus sinistram. Vt in hoc exemplo factum esse vides, in quo quatuor ordines numerorum sub linea constituti sunt ex numeris productis.

per 9.   *per 7.*

4 | 1 | 4 | 4   2 | 4 | 4 | 2

```
        4300678
         600394
    ___________
       17202712
      38706102
     12902034
    25804068
    ___________
    2582101267132
```

Totus enim numerus productus ex multiplicatio-

catio-

catione 4. in omnes figuras superioris numeri habet primam suam figuram sub 4. Ita quoque numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri superioris primam suam figuram habet sub 9. Eadem ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri superioris collocata est sub 3. Denique prima figura numeri producti ex multiplicatione 6. in omnes figuras superioris numeri posita est sub 6. Reliquæ autem figuræ ordine suo progrediuntur versus sinistram.

QVONIAM vero cifra siue multiplicās siue multiplicata producit 0. propterea omisimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas nō multiplicauerimus in numerum superiorem, quia semper produxissent 0. Idem faciendum est, quotiescunque in numero inferiori fuerint aliquot cifræ. Eas enim semper omittemus, & ad proxime sequentem figuram significatiuam nos conferemus. Cifræ tamen superioris numeri, si quæ sint, negligendæ non sunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri significatiuas producant 0. sæpenumero tamen producto illi 0. addendum est aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reseruatum est, idque loco producti reponendum sub linea. Immo etiam si nihil reseruatum sit aliquando, ponenda tamen est figura 0. sub linea loco producti. Quæ omnia in superioribus exēplis obseruata sunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per 0. produximus 0. sed quia in præcedēnti multiplicatione reseruata erāt

3. po-

3. posuimus 3. loco producti 0. Rursus cum multiplicauimus iterum 8. per 0. produximus etiam 0. & quoniã nihil reseruatũ fuit, posuimus 0. loco producti. Idemque factum est in posteriori exẽplo.

POST *hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur, vt sub ea ponatur summa ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem summa colligenda est, vt in additione traditum est; dummodo prima figura cuiuslibet producti eum intelligatur locum occupare, quem figura primi producti, sub qua illa collocatur, occupat: Hoc est, vt figura 2. quæ prima est secundi numeri producti in proposito exemplo, cogitetur esse posita sub secundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima est in tertio producto, intelligatur esse locata sub tertio loco primi producti; Denique figura 8. quæ prima etiam est in quarto producto, concipiatur occupare sextum locũ sub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides esse positas. Itaque vt exemplo rem monstremus, hac ratione summa colligetur. In numeris productis sola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur sola ponenda est in primo loco sub linea. Deinde in secundo loco sunt 1. & 2. quæ faciunt 3. sub linea in secundo loco ponenda. Rursus in tertio loco sunt 7. 0. 4. quæ efficiunt 11. Collocãda ergo erit 1. sub linea in tertio loco, & seruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione sũma collecta erit 2582101267132. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678. in 600394.*

VT

VT autem videas eundem numerum gigni, etiam si maiorem numerũ sub minore statuamus, apposuimus hoc alterum exemplum sequens, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter sese multiplicãtur, sed maior numerus sub minore positus est, factique sunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirum sunt figuræ significatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus est, qui prius.

HIC modus multiplicandi, quem hactenus exposuimus, apud omnes magis vsitatus est: alias tamen multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore nostra Arithmetica explicabimus.

per 9. | per 9.

	600394
	4300678
	4803152
	4202758
	3602364
	1801182
	2401576
	2582101267132

Cross (left): 4, 4, 1, 4 — Cross (right): 2, 4, 4, 2

EXAMEN multiplicationis triplex est. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciatur primũ 9. ex primo numero multiplicato, quoties fieri potest, vt in additione diximus, residuum que in sinistra parte crucis ponatur. Deinde reie- Prima probatio multiplicationis per 9.

ctis

ctis 9. eodem modo ex altero numero multiplicato, locetur residuum in dextra parte crucis. Post hæc, multiplicatis his duobus residuis inter se, & ex producto reiectis 9. statuatur residuum in superiori parte crucis. Postremo ex summa omniũ productorum reiectis quoque 9. scribatur residuũ in parte crucis inferiore. Necesse enim est, residuũ hoc æquale esse residuo superiori, si erratũ in multiplicatione non est. Exempla posita sunt in superioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394. residuum est 4. Residuum autem huius numeri 8. est 8. quia 9. abijci non possunt. Multiplicatis autem his residuis 4. & 8. inter se, fiunt 32. à quibus si reijciantur 9. remanent 5. Ac tantundẽ relinquitur, si reijciantur 9. ex producto 4803152. In secundo autem exemplo, residuum primi numeri est 1. secundi autem 4. Multiplicatisq; inter se his residuis 1. & 4. fiunt 4. in suprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non possunt. Reiectis autem 9. ex tota summa, supersunt etiam 4.

Secũda probatio multiplicationis per 7.

ALTERUM examen fit per reiectionem 7. si nimirum ex eisdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in superiori examine præcepimus reijcienda esse 9. Exemplũ habes in postremis duabus multiplicationibus. Sed duo hæc examina sunt etiam fallacia, propter causas supra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuisionem.

TERTIUM examen certissimum est, fitq; per diuisionem. Si enim tota summa producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplicatorum,

torum, prodibit necessario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuisio facillima erit, cū opus non sit, Quotientes figuras inquirere, cum ex ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuisio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

4068		3069	
23		45	
12204	0 / 0 / 5 / 0	15345	0 / 0 / 0 / 0
8136		12276	
93564		138105	

IN priori horum exemplorum primum residuum est 0. *Vnde licet secundum residuum sit* 5. *tamen residuorum multiplicatio facit* 0. *In posteriori autem vtrumque residuum numerorum multiplicatorum est* 0. *Vnde eorum multiplicatio dabit etiam* 0. *atque ita in vtroque exemplo residuū numeri producti etiam necessario erit* 0.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

QVOD si vterque numerus multiplicandus, vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter se, & producto numero apponendæ ordine omnes illę cifræ abiectæ. Vt si multiplicandus sit numerus 3406. *per* 4000. *reiectis*

cifris 000. *multiplicetur datus numerus per* 4. *& numero producto* 13624. *apponantur eædem cifræ, hoc modo.* 13624000. *Sic etiam, si multiplicanda sint* 3040000. *per* 203000. *reiectis* 7. *cifris ad dextram horum numerorum positis, multiplicentur reliqui numeri* 304. *&* 203. *inter se, & producto numero* 61712. *apponantur reiectæ illæ septẽ cifræ, hoc modo.* 617120000000.

HINC fit, si numerus aliquis multiplicandus sit per 10. *vel* 100. *vel* 1000. *vel* 10000. *&c. addendas esse illi numero ad dextram tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, sine vlla alia multiplicatione: quia, reiectis cifris, superest sola vnitas, quæ numerum datum multiplicãs eundem numerum producit. Vt* 5067. *multiplicata per* 10. *faciunt* 50670. *Multiplicata autẽ per* 100000. *faciunt* 506700000. *Ita quoque* 3000. *multiplicata per* 100. *faciunt* 300000. *&c.*

DIVISIO INTEGRORVM numerorum. Cap. V.

Diuisio q̃d

D*IVISIO est distributio propositi numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuisio numeri* 36. *per* 9. *est distributio eius in nonas partes, nempe à* 9. *denominatas; quarum quidem singulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt* 4. *sit numerus ex hac diuisione productus, qui Quotiens dici solet, propterea quòd indicat, quoties numerus* 9. *qui diuidens, siue diuisor appellatur, in diuidendo numero* 36. *contineatur.*

Quotiens quid.

In-

Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuisionem ita quoque describi posse. Diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet. Vt in proposito exemplo perspicuum est.

Quo pacto numeri in diuisione sint collocandi.

IN diuisione scribitur diuisor sub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram sub prima, & secundam sub secunda, &c. vt in additione, subtractione, & multiplicatione factum est, sed contrario ordine. Ponenda enim hic est vltima figura diuisoris sub vltima figura diuidendi numeri, & penultima sub penultima, &c. Vt si diuidendus sit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in apposito exemplo apparet.

7809
47

QVOD si vltima figura diuisoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocãda erit vltima figura diuisoris sub penultima figura numeri diuidẽdi, & penultima sub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo est manifestum. Idem faciendum est, si vltima figura diuisoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, sed penultima maior, quàm penultima: Vel si & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, sed antepenultima diuisoris maior, quàm antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotiescunque diuisor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuisor scribitur. Quæ omnia in his tribus exemplis manifesta sunt.

37800
47

46800. 476047. 4792.
47 4762 47

Diuisio quomodo fiat.

ITA autem diuisio fiet. Primum quaratur, quoties diuisor in numero sibi suprascripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi post lineam hanc lineam curuam (scribatur; atqui hic numerus (qui semper vnica figura scribitur. Nunquam enim maior numerus, quàm 9. poni potest in Quotiente; etiamsi diuisor videatur sæpius aliquando contineri in numero suprascripto, quàm nouies, vt in exemplis patebit.) in diuisorẽ multiplicetur, productusque numerus (qui seorsum scribendus nõ est, sed memoria retinendus.) ex suprascripto numero subtrahatur, vt in subtractione docuimus, scribendo singulos numeros residuos supra figuras, à quibus facta est subtractio, deletis prius hisce figuris vnà cum diuisore. Numerus autem totus residuus supra diuisorem notatus minor esse debet diuisore, aliàs erratum esset. Id quod etiam in alijs residuis obseruandum erit.

In Quotiẽte non potest poni maior numerus, q̃ 9.

Residuus numerus semper debet esse minor diuisore.

DEINDE promouendus erit diuisor dextram versus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in numero sibi suprascripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod si in aliqua promotione diuisor maior fuerit numero suprascripto, ita vt nec semel quidem in eo contineatur, scribenda erit figura 0. post illum numerum, quem post lineam curuam scribendum esse diximus, & diuisor delendus, iterumq́; promouendus

ad

ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero suprascripto contineatur, &c. Atque ita semper promouendus erit diuisor, donec nullus locus in numero diuidendo supersit, in quem diuisor possit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

SIT primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primum inuenio diuisorem 8. cõtineri in numero suprascripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus supra diuisorem esse scriptus, qui exprimitur figura supra primam figuram diuisoris posita, & omnibus alijs versus sinistram, si quæ sint. Vt in dato exemplo numerus supra diuisorem positus est 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ supra posita est, cognosces facile, quoties figura diuisoris in supra posito numero contineatur. Si enim figuram diuisoris sumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorsum descendendo, accipias numerũ suprapositum, vel, si is non inuenitur, eo proxime minorem, indicabit figura ei respondens in sinistro latere, quoties figura diuisoris in numero suprapósito cõtineatur. Vt in dato exemplo, sub figura 8, non reperitur numerus 76. suprapositus: si igitur accipiatur 72. proxime minor, reperietur in sinistro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8, in 76. atque ita de cæteris. Pono igitur 9. post lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicẽdo, octies 9. faciunt 72. quæ subtrahenda sunt ex numero 76. supra diuisorem posito, hoc modo. Subtractis

Quomodo numerus per vnicam figuram diuidatur.

Qui numerus dicatur supra diuisorem positus.

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoscatur, quoties figura diuisoris in suprapósito numero contineatur.

```
 4
76048 (9
 8
```

2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figura 6 in numero diuidendo, pono 4. supra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono supra 7. quia poni deberet cifra., quæ superuacanea esset, eò quòd illam nulla alia figura sequatur versus sinistram. Atque ita absoluta est vna operatio diuisionis, remanetq́, hic numerus 4048. vt in proposito exemplo vides.

DEINDE promoto diuisore in præcedentem locum sub 0. vt hic vides in secundo exemplo, video diuisorem 8. in numero suprascripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. post figurã 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico; quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuisorem.) faciunt 40. quæ subtracta ex numero 40. supra diuisorem posito nihil relinquũt. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit secunda operatio diuisionis, remanebitq́, hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

```
  4
 76048 (9
  88
```

```
  4
 76048 (95
  88
```

```
  4
 76048 (95
  888
```

RVRSVS diuisore promoto in præcedentem locũ sub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuisorem 8. nec semel quidem contineri in suprascripto numero 4. Pono igitur 0. post figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum est.

Et quoniam figura o. multiplicata per diuiſorem nihil producit, nihil ſubtrahendum erit ex numero 4. ſupra diuiſorem poſito.

Deleto igitur diuiſore, abſoluta erit tertia operatio diuiſionis, remanebitq́; numerus 48.

4
78248 (950
888

vt in hoc eodem quinto exemplo manifeſtum eſt.

POSTREMO, promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 8. vt hic in ſexto exemplo cernitur, inuenio diuiſorẽ 8. in numero 48. ſupraſcripto contineri ſexies.

4
78248 (950
8888

Pono igitur 6. poſt figuram o. vltimo repertam, vt hic in ſeptimo exemplo factum eſt, & dico; ſexies 8. (multiplicando nimirum figuram 6. inuentam in diuiſorem) faciunt 48. quæ ſubtracta ex numero

4
78248 (9506
8888

48. ſupra diuiſorem poſito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit tota diuiſio, cum nullus alius locus ſuperſit in numero diuidendo, in quem diuiſor poſſit promoueri; nihilq́; in diuiſione ſupererit. Itaque totus Quotiens numerus eſt 9506.

POSVI tot exempla in hac diuiſione, vt diſtinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur: quamuis ſolum extremum ſit inſtar omnium, ita vt in operatione neceſſe non ſit alia exempla depingere, ſed ſatis ſit, ſi vltimum deſcribatur.

Quotiens quot figuras habeat.

VIDES igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuisor sub numero diuidendo positus est. Id quod in omnibus alijs diuisionibus, etiam per plures figuras institutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuisor sub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

SIT deinde numerus 1832487. diuidendus per numerum 469. qui non vna, sed pluribus figuris scribitur. Hic, vt sciatur, quoties diuisor in numero suprascripto contineatur, (est autem in hoc exemplo numerus 1832. supra diuisorem positus.) non est id de toto diuisore inquirendum, sed satis est, si inuestigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic est 4. contineatur in numero suprapposito, (Dico autem etiam hic illum numerum supra vltimam figuram diuisoris, vel supra quamcunq; aliã, esse positũ, qui exprimitur figura supra eam scripta, & omnibus alijs versus sinistram, si quæ sint. Vt in dato exemplo, supra figuram 4. positus est numerus 18. supra 9. aũ eit numerus 1832.) qui hic est 18. hac tamen adhibita cautione, vt non semper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima diuisoris figura in numero supra eam posito continetur; sed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuisorem multiplicata eo ordine, quem iam præscribemus, talem numerum producat, qui & ex numero supra diuisorem posito subtrahi possit, & subtractus relinquat numerum (si quem relinquat) diui-

```
   42
   885
1832487 (3
   469
```

Qui numerus dicatur supra quãcunq; figuram diuisoris esse positus.

sore minorem. Itaque (vt ad exemplum propositũ veniamus) quamuis vltima figura diuisoris, quæ est 4. contineatur in suprapposito numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuisorem producit maiorem numerum, quàm 1832. qui supra diuisorem positus est, ita vt ex suprapposito numero subtrahi non possit, non pono 4. in Quotiente, sed 3. Quòd si hæc figura 3. multiplicata in totum diuisorem produceret maiorẽ etiã numerum, quàm 1832. ponerem 2. loco 3. Et si figura 2. multiplicata in diuisorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerẽ 1. atque ita semper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuisorem multiplicata numerum gignat, qui ex suprascripto numero detrahi possit.

Quõ ducẽda sit figura Quotientis inuẽta in diuisorem.

SIC autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuisorem. Primum ducenda est in vltimam figuram diuisoris, & hoc productum ex numero supra vltimam figuram illam posito auferendum, deleta prius illa figura diuisoris, vna cum numero, ex quo facta est subtractio. Deinde multiplicanda est in figuram penultimam diuisoris, productumq; ex numero suprapposito detrahendum, vt prius. At que hoc modo in omnes figuras diuisoris multiplicanda est, &c. vt in nostro exemplo. Ex 3. in 4 fiunt 12. quæ ita subtrahenda sunt ex 18. numero suprapposito. Demptis 1. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. supra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. De-

leo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiūt. 18. quæ ex numero supra posito 63. sic subducenda sunt. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. subtrahi nequeunt.) est 2. additis 3. fiunt 5. quę pono supra 3. deleta prius figura 6. in diuisore, vnà cum figura 3. in numero diuidendo. Addo autem 1. propter distantiam à 10. cuius mentio facta est, ad 1. (nempe ad denā numeri 18. qui subtrahitur.) fiuntq́, 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono supra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandem ex 3. in 9. fiunt 27. quæ sic ex suprascripto numero 452. detrahuntur. Distantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non possunt) est 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono supra 2. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. subtrahendi.) propter dictam distantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex secunda figura numeri 452. à quo subtractio fit.) relinquunt 2. Pono ergo 2. supra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum esset, si plures figuræ in diuisore reperirentur. Absoluta ergo hac ratione erit diuisionis vna operatio, remanebitq; hic numerus 425487. vt in exemplo suprascripto vides.

PROMOTO iam diuisore in precedentē locū, ita vt singulæ figuræ diuisoris locum vnum mutent, vt hic vides, intelligo vltimam figuram diuisoris, nempe 4. in suprapositio numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9.

```
   42
  655
1832487 (3
 4869
  46
```

post

post figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in sequenti exemplo patet, & dico. Ex 9. in 4. fiunt 36. quę ita subtraho ex numero 42. suprascripto. Distantia 6. à 10. (quoniam 6. ex 2. subduci nõ possunt) est 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono supra 2. deleta prius figura 4. in diuisore, vna cum figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad

```
     1
    63
   422
  6853
1822487 (390
 469669
   4996
     44
```

3. (nimirum ad denas numeri 36. subtrahendi.) propter dictam distantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. Rursus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoque 5. ex 6. remanet etiã 1. Quare deleta figura 6. in diuisore, vnà cum figuris 5. & 6. in numero diuidẽdo, pono supra singulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita subduco ex numero 114. suprapolito. Dẽpto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. supra 4. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 4. in numero diuidendo. Distantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. subduci nequeunt) est 2. si addatur 1. fiunt 3. quæ supra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictam distantiam à 10. subtraho 1. ab 1. nihilq; remanet. Deleo ergo 1. absolutaq; erit secunda diuisionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

RVRSVS promoto diuisore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura

gura 9. locetur sub 8. at 6. sub 3. & 4. sub 3. video vltimam figuram diuisoris, puta 4. nec semel quidē in suprapositō numero contineri, quare scribo 0. post figuram 9. proxime inuentam, deleoq; diuisorem. Absoluta namque ita erit tertia operatio diuisoris, remanebitq; idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

POSTREMO promoto diuisore in primū locum, vt in eodem proximo exemplo manifestum est, reperio vltimam diuisoris figuram 4. in suprascripto numero 33. contineri septies tantum: quia si sumeretur octies, non posset à numero 3387. suprapoſito fieri subtractio numerorum productorum ex 8. in totum diuisorem. Itaque pono in Quotiente figurā 7. post alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet, &

```
  1
  631
 42150
638384
1832487 (3907. 5/4 0/6 4/8
466666
 4966
  44
```

dico. Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. suprapoſito demo. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non possunt subtrahi) est 2. si addantur 3. fiunt 5. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. supra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. subtrahendi.) propter dictam distantiā à 10. facioq; 3. quę ex 3. ablata nihil relinquūt. Quare deleta figura 3. rursus dico. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero suprapoſito ita tollentur.

lentur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. supra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono. 1. supra eam, & tandem dico. Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero suprapositio sunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. supersunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, statuo 4 supra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. supra eam. Atque ita tota diuisio absoluta est, remanetque numerus hic 104 qui post Quotientem 3907. collocandus est supra diuisorem 469. interiecta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus, hoc est, partes 104 ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur esse diuisum. Eodem pacto in aliis diuisionibus ponitur residuum, si quod fuerit, supra diuisorem, linea inter ipsos interiecta, vt fiat fractus numerus. *Quid agendu sit cum numero ex diuisione relicto.*

IMMO vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus supra diuisorem, interiecta dicta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus; Vt si diuidendi sint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides esse appositum; ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur esse diuisus. Quid autem sit huiusmodi fractus numerus, & quo modo eius valor exploretur tam in monetis, quã in ponderibus, aut mẽsuris, prout numerus diuidendus significat monetam, aut pondera, *Quando numerus minor per maiorẽ proponitur diuidendus, quid agendum.*

$\frac{48}{60}$

ra,

ra, mensuras ve; dicemus in tractatione fractorum numerorum.

Quomodo nonnulli ducant figurá Quotientis inuentá in diuisorem.

S V N T nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totū diuisorem. Nam primùm eam multiplicant in primam figuram diuisoris, productumq́; ex numero ei figuræ suprapoſito auferunt: Deinde eandem ducunt in secundam figuram diuisoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint; productosq́; numeros ex ſuprascriptis numeris tollunt. Vt si diuidendus sit numerus 3387. per 469. (quemadmodū in vltima operatione superioris exempli factum eſt.) poſtquam repererunt, vltimam figuram diuiſoris, nimirum 4. contineri ſepties in ſupraposito numero 33. (Nam octies comprehendi non poteſt, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, ſed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex ſupraposito numero 3387. ſubtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo, ponunt 4. ſupra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda ſupra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demunt ex ſupraposito numero 332. Ablatis 2. ex 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuiſore vnà cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. ſupra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non poſſunt ex 3. ſumūt

	10
	2924
	3387 (7
	469

diſtan-

distantiā 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda supra 3. prius deleta. Propter dictā autem distantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. supra 3. deleta prius figura 3. Postremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda supra 9. si prius deleatur in diuisore figura 4. vnà cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: absolutaq́, erit operatio. Hac porro ratione plerūque fit, vt non scribantur tot figuræ supra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuisorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuisoris, deinde in penultimā, &c. vt supra explicauimus. Id quod exēplis addisces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis est in vsu, faciliusq́, in eo error corrigi potest, si quando nimis magna figura posita fuerit in Quotiente, vt mox docebimus.

HOC exēplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcunque figurarum. Totus enim labor in eo positus esse videtur, vt cognoscatur, quoties vltima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat, vt videlicet figura hæc Quotientis in omnes figuras diuisoris multiplicata numerum procreet, qui ex suprapositio numero subduci possit, numerusque post hanc subtractionem relictus sit diuisore minor. In quo difficultas diuisionis cō sistat.

QVOD si quando contingat, (id quod non raro ijs euenire solet, qui parum in hoc negotio sunt Quādo in Quotiente sumpta est figura ni-

mis parua, vel magna quid agendum.

exercitati.) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuisoris multiplicata, productisq́, ex numero supra diuisorē posito subductis, numerus relictus maior sit diuisore, vel certe non omnes producti subtrahi possint; si id quidem accidat in principio diuisionis, facile error corrigetur, si accipiatur in Quotiēte figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc sunt figuræ numeri diuidendi supra diuisorem positæ, etiam si deletæ sint, ita vt facile ab iȷs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuisoris producti iterum possint subduci, præsertim si figuræ illæ numeri diuidendi deletæ scribantur ordine supra alias figuras deletas, & diuisor etiam sub diuisore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis facessant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, nō tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoscantur figuræ numeri diuidendi supra diuisorem in illa operatione positæ ab aliȷs figuris; quippe quæ iam deletæ sint, & cum aliȷs permixtæ, ac supra numerū diuidendum positæ. Quare ne tunc cogamur diuisionem totam reiterare, (quod necessario faciendum esse omnes docent. Id quod permolestum esset, præsertim si iam plures operationes diuisionis forent absolutæ.) excogitauimus huiusmodi remedium.

SI figura Quotientis accepta sit nimis parua, ita vt numerus relictus post subtractionē numerorum, qui ex multiplicatione illius figurę in omnes figuras diuisoris producuntur, maior sit diuisore, subtrahemus diuisorem ex numero relicto toties,

quo-

quoties possumus, donec numerus relinquatur minor diuisore, & quoties is subtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotientis addemus. Si vero figura Quotientis accepta sit nimis magna, adeo vt post subtractionem aliquot numerorũ, qui ex multiplicatione illius figuræ in aliquot figuras diuisoris producuntur, in aliquem numerum productum incidamus, qui amplius subduci nõ possit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuisoris deletas, quarum nimirum numeri producti subtracti iam sunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine supra illas figuras diuisoris scribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione restituetur numerus, qui supra diuisorem positus erat ante illam operationem. Quocirca eum iterum per diuisorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confusionẽ pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in Quotiente, quæ vna vnitate minor sit, quàm prior accepta. Et si hæc figura etiam nimis magna sit, restituemus eodem modo numerum supra diuisorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorẽ. Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuisoris multiplicata numeros producat, qui & subtrahi possint, & numerũ relinquant diuisore minorem. Sed hæc omnia hoc proposito exemplo fient magis perspicua.

Exempli correctionis, quando nimis parua figura in Quotiente accepta est.

SIT diuidendus numerus 1 6 2 3 1 4 9. per 2899. Collocato diuisore sub numero diuidendo, ponamus quempiam parum exercitatum accepisse in Quotiente figuram 4. Vnde si dicamus. Ex

4. in

4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quē in proximo exēplo explicauimus) ex 16. remanent 8. Deinde ex 4. in 8. fiūt 32. quibus subductis ex 82. remanent 50. Rursus ex 4. in 9. fiūt 36. quibus sublatis ex 503. remanēt 467. Denique ex 4. in 9. fiūt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior est diuisore. Nimis ergo parua est figura accepta 4. Quare deleto residuo hoc, vnà cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. *numeri diuidendi deletas supra alias figuras deletas, & diuisorem deletum renouatum sub diuisore collocabimus, vt in proximo exemplo factum esse vides. Qua ratione restitutus erit totus numerus diuidendus* 1622149. *vnà cum diuisore, ac si nondū inchoata esset diuisio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quàm 4. in Quotiente, vt in hoc altero exēplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiūt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quę decem significat respectu figurę 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus subtractis ex 62. remanent*

```
    4
    863
    8075
   1622149 (4
    2899
```

```
    6
    423
    8671
   12078
   1622149 (4
    2899
    2899.
```

```
    1
    2 3
    678
    4276
    8621
   18078
   1622149 (45
    28699
    2899
     289.
```

manent

manent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. subductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

SED vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente positam esse figurã 6. Hæc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quę ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. sit nimis magna. Quamobrem deleto residuo hoc 4. vna cum accepta figura 6. scribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas supra easdem, & figuram 2. in diuisore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propositus, vnà cum diuisore restituatur, ac si diuisio nondum esset inchoata, vt in hoc exemplo apposito factum esse vides. Ponemus ergo, vt in sequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quàm 6. in Quotiente, & dicemus. Exemplũ correctionis, quãdo nimis magna figura in Quotiẽte accepta est.

```
 4
1623149 (6
 2899
```

```
 6
1 4
1623149 (6
 2899
 2
```

Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6.

```
 1
 2
 6 3
1 4786
1623149 (65
 2899
 2
```

E dice-

dicemus rursum. Ex 5.in 8.fiunt 40. quibus detractis ex 62.remanent 22.Item ex 5.in 9.fiunt 45.quibus demptis ex 223.remanent 178.Denique ex 5.in 9.fiũt 45.quibus subductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti subduci, relictusque est numerus diuisore minor. Quare recte accepta est in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendum sit, quando in principio diuisionis accepta est figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, si in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta sit.

PROMOVEATUR ergo diuisor in superiori exemplo, in quo nimis parua figura sumpta fuit in principio diuisionis, vt ibidẽ cernis in tertia positione exempli. Fingamus autem, vltimam diuisoris figuram 2. in suprapositio numero 17.contineri septies; atque adeo in Quotiẽte post figuram 5. inuentam scribi 7.Quo posito, dicemus. Ex 7. in 2.fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ supra 7. scribo, deleta prius figura 2.in diuisore, vnà cũ figuris 7. & 1. in numero

1
233
975
4226
5831
18078
1922149 (457
28999
2899
289

diuidendo. Deinde rursus dicemus. Ex 7.in 8.fiũt 56. quę ex 33.auferri nequeunt. Est ergo figura 7.accepta nimis magna. Vt igitur restituatur numerus 17.à quo facta est subtractio, si forte is inter

ter tot figuras deletas non internoſceretur, multi plicanda eſt figura 7. accepta in figuram 2. in diui ſore deletam, & producto addenda figura 3. ſupra dictã figurã diuiſoris poſita. Vt quoniã ex 7. in 2. fiunt 14. ſi addantur 3. fiũt 17. Deleta igitur figura 3. ſcribemus ſupra eam numerum 7. & ſupra figuram 1. deletam ponemus 1. atque ita reſtitutus erit numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, vt in hoc appoſito exemplo apparet. Poſita autem figura 2. ſub figura 2. in diuiſore deleta, vt etiã

```
     1
    17
    233
    978
   4236
   8931
  18078
  1923149 (457
   28999
   2899
    289
     2
```

diuiſor reſtituatur, vt in eodem hoc exemplo manifeſtum eſt, concipiamus vltimam figuram diuiſoris 2. contineri in 17. non ſepties, ſed ſexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet. Quo poſito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanent 5. Deleta ergo figura 2. in diuiſore, vnà cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 7. & dicemus. Ex 6.

```
    18
   178
   238
   9782
   4239
   8931
  18078
  1923149 (4576
   28999
   2899
    289
     2
```

in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuisore, vnà cum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 3. & rursus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus subductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuisore vnà cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. supra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. subtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam est figura 6. in Quotiente. Quare vt sciamus, quinam numerus supra diuisorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictã 6. in figuras diuisoris deletas, vt dictum est. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ supra figuram diuisoris 9. deletã posita sunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. scribemus supra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ seruauimus, fiunt 53. Scribemus ergo 3. supra 5. & retinebimus 5. Postremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quæ reseruauimus, fiũt 17. quæ supra 15. collocabimus: atq; ita restitutus erit numerus, qui ante hanc operationem supra diuisorem positus erat. Restitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuisore deletis, atque deleta figura

```
     17
    183
    178
    2326
    9782
    4220
    8921
   18078
   1922149 (4576
    28999
    2899
     289
     289
      2
```

gura 6.in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5.in 2. fiût 10. quibus ablatis ex 17. remanent 7. delebimus figurã 2. in diuisore, vnà cum figura 1.in diuidendo numero, quæ decem significat respectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5.in 8. fiunt 40. quibus subductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuisoris 8. vnà cum figura 7. in numero diuidendo, scribemus 3. supra eã,

```
   2
   38
  170
  1836
  1781
  2330
  0782
  4230
  8031
 182759
1023149 (45705
 280009
 28009
   280
   280
   228
```

rursusque dicemus. Ex 5.in 9. fiunt 45. quibus dẽptis ex 336. remanent 291. Deleta igitur figura diuisoris 9. vnà cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

PROMOTO tandem diuisore in proximũ locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuisoris figuram 2. in suprascripto numero 28. contineri septies. Posita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo apposito vides, dicemus. Ex 7.in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent

14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Itẽ ex 7. in 9. fiunt 63. quibus subductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanẽt 8406. qui numerus maior est diuisore; & proinde figura accepta 7. nimis parua est.	8 10 24 384 1790 1836 1781 2336 6782 42360 89316 1807866 1623146 (457057 2899960 28999 289 289 228

Quare subtrahemus diuisorem ex dicto residuo, quoties possumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quàm 7. scribemus in Quotiente, quoties diuisor detractus fuerit. Ita autem diuisorẽ detrahemus in hoc sequenti exẽplo, restituto prius diuisore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Item subductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanent 5507. qui numerus adhuc maior est diuisore. Detractis igitur rursus 2. ex 5. remanent 3. Demptis autem 8. ex 35. remanent 27. Item subductis 9. ex 270. remanent 261. Denique subtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numerus minor iam est diuisore. Quia ergo bis detractus est diuisor, scribemus in quotiente, deleta prius figura 7. numerum 9. duabus videlicet vnitatibus maio-

rem

rem, quàm 7. Itaque totus numerus Quotiens est 559. Coacti autẽ sumus rem tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, quid in singulis operationibus relinquatur, quãuis solum hoc vltimum instar sit omnium. Et licet tot verbis remedium istud exposuerimus, vsus tamen facilè docebit, rem esse breuiorem ac faciliorem, quàm vt verbis exprimi possit.

```
      2
      3
      8
      06
      87
     108
     240
     384
    1700
    18360
    17811
    23360
    07821
    423608
    860107
   1807800
   1023140  (4570579
    289999
    28999
     2899
     289
     228
      28
```

HOC *ergo remedium, si adhibeatur, quotiescunq; in Quotiente figura maior, aut minor, quàm oportet, sumpta fuerit, incredibile est, quàm expedite numerus quilibet per quemcunque numerum diuidatur: quia hac ratione non opus est, vt simus nimis anxij, qualem figuram in quauis operatione scribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, si quis commissus erit, sine vllo fere labore corrigere possimus: ita vt hic modus diuidendi, quem hactenus præscripsimus, sit inter omnes, qui ab alijs auctoribus explicari solent, præ-*

ſtantiſſimus, atque expeditiſſimus, ac propterea ſumma diligentia, & cura adhibenda, vt in eo ſeſe exerceat is, qui in arte ſupputandi cupit eſſe excellens, & præſtans.

Quomodo alij diuiſioné abſoluant.

NAM quod alij multiplicent figurã in Quotiente poſitam in totum diuiſorem, productumque numerum ſub diuiſore collocent, (prima figura poſita ſub prima, & ſecunda ſub ſecunda, &c.) vt eum ex numero ſupra diuiſorem poſito detrahãt; res eſt certa illa quidem, ac facilis, ſed quæ longiorem efficiat diuiſionem, quàm par eſt, eumque, qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689. *per* 1298. *diuidant, poſtquam in prima operatione poſuerunt in Quotiente figuram* 3. *multiplicant eam in diuiſorem, primum quidem in figuram* 8. *dicendo. Ex* 3. *in* 8. *fiunt* 24. *ſcribunt ergo* 4. *ſub* 8. *& ſeruant* 2. *Deinde ex* 3. *in* 9. *fiunt* 27. *Additis* 2. *quæ ſeruata ſunt, fiunt* 29. *Poſitis ergo* 9. *ſub* 9. *ſeruant* 2. *&c. Poſt hæc, deleto diuiſore, auferunt* 4. *ex* 8. *collocantque reſiduum* 4. *ſupra* 8. *deletis prius figuris* 4. *&* 8. *&c. Promoto deinde diuiſore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius abſoluimus, cum numerum productum non ſcribamus ſub diuiſore.*

```
   45
  1741
 40689 (31
 12988
 3894
  129
```

Commoditas in hoc modo diuidendi.

Habet tamen modus iſte hanc commoditatẽ, quod ex ipſa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente ſit nimis magna, nec ne. Nã ſi productus numerus ex multiplicatione figuræ il-

lius

lius in diuiſorem ſubtrahi poſſit ex numero ſupra diuiſorem poſito, numerumque relinquat diuiſore minorē, figura illa recte accepta eſt; ſin minus, erratum eſſe, dubitandum non eſt.

QVOD *etiam alij diuiſorem prius per ſingulas figuras ſignificatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem ſcribendo, vt inter hos productos quærāt numerum poſitum ſupra diuiſorem, eoq́; inuento, vel certe, ſi non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantē illi aſcriptam in Quotiente ponant, atque numerum acceptum ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubducant; res etiam facilis eſt, & commoda, præſertim tyronibus, & parum in hac arte exercitatis, ſed nimis longa, ac moleſta. Nam vt v. g. diuidant hunc numerum 97086. per 37. collocant diuiſorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatum iuxta 2. triplicatū vero iuxta 3. &c. Poſtea* Aliusmod. abſoluendi diuiſionẽ.

```
 23
 97086 (26
 377
  3
```

37	1
74	2
111	3
148	4
185	5
222	6
259	7
296	8
333	9

inter hos numeros inquirunt numerū 97. ſupra diuiſorem poſitum, quem quoniam non inueniunt, accipiunt 74. proxime minorem, & figuram 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntque 74. ex 97. ſcribentes reſiduum 23. ſupra 97. deletis prius figuris 7. & 9. vnà cum diuiſore. Promoto deinde diuiſore, quærunt inter eoſdem numeros hunc numerum 230. poſitum ſupra diuiſorem: quo non inuen-

to, accipiunt proxime minorem 222. collocantque figuram 6. è regione eius positam in Quotiente, & denique numerũ eundem 222. ex 230. subducunt. Atque hoc modo progredientes totam diuisionem perficiunt. Sed quis non videt, diuisionem hac ratione longius, quàm par est, produci, præsertim, si diuisor quatuor, aut quinque, vel etiam pluribus figuris scribatur?

Prima probatio diuisionis per 9

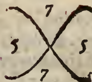
RESTAT, vt examen diuisionis tradamus, quod triplex est. Primum fit per abiectionẽ 9. hoc pacto. Reiectis 9. ex diuisore, quoties fieri potest, vt in additione docuimus, ponatur residuũ in sinistra parte crucis. Reiectis item 9. ex Quotiente, quoties fieri potest, ponatur residuum in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hisce duobus residuis inter se, & ex ꝓducto abiectis 9. quoties fieri potest, ponatur residuum hoc, si in diuisione nihil remansit, in superiore parte crucis. Si autem in diuisione residuum aliquod fuit, coniungendum est vltimum illud residuum cum figuris huius residui diuisionis, & semper abijcienda 9. istudque residuum in superiori parte crucis reponendum. Postremo reiectis 9. ex numero diuidendo, quoties fieri potest, ponatur residuũ in parte inferiore crucis. Si enim residuum hoc æquale fuerit illi residuo in superiori parte crucis collocato, recte peracta est diuisio, sin minus, non recte.

ITAQVE hæc diuisio ita examinabitur. Reiectis 9. ex diuisore 23. remanent 5. Abiectis item 9. ex Quotiente 176. remanent quoque 5. Multiplicatis autem hisce residuis 5. & 5. inter

se, gi-

se gignuntur 25. ex quibus si abijciãtur 9. remanent 7. quæ (quoniã

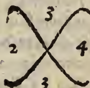
x
xzx
z7z
4048 (176
zzzz
zz



nihil ex diuisione relictũ est) in superiore parte crucis collocanda sunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7. recte peracta est diuisio.

HAEC autem alia diuisio hac ratione examinabitur. Reiectis 9. ex diuisore 236.

1
z
x83
4z4
zz0z0
45678 (193
z3666
zzz
z

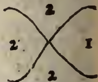


remanent 2. Reiectis item 9. ex Quotiente 193. remanent 4. Multiplicatis autem hisce residuis 2. & 4. inter se, fiunt 8. ex quibus non possunt reijci 9. Hæc ergo 8. si nihil remansisset in diuisione, collocanda essent in superiori parte crucis: sed quoniam supersunt 130. dicemus 8. & 3. faciunt 11. Reiectis 9. remanent 2. Addita 1. fiunt 3. in superiori parte crucis collocanda. Et quoniam, reiectis 9. ex numero diuidendo 45678. remanent quoque 3. recte facta est diuisio.

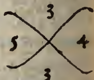
SECVNDVM examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex residuo Secũda probatio diuisionis 27.

ſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit, eodem modo reijcia-tur 7. & reſiduum adijciatur ad illud reſiduum, quod in examine per abiectionem 9. addendum eſſe diximus reſiduo diuiſionis, atque ex aggregato reijciantur 7.

VT prior proximarum duarum diuiſionũ ita examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiente 176. remanet 1. Multiplicatis autem biſce reſiduis 2. & 1. inter ſe, procreantur 2. in ſuperiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuiſione ſuperfuit. Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiam 2. recte facta eſt diuiſio.



POSTERIOR vero diuiſio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 236. remanent 5. Item abiectis 7. ex Quotiente 193. ſuperſunt 4. Multiplicatis autẽ duobus biſce reſiduis 5. & 4. inter ſe, & ex producto 20. reiectis 7. relinquuntur 6. quæ, ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in parte crucis ſuperiore: ſed quoniã reliquus fuit numerus 130. ex quo ſi abijciantur 7. ſuperſunt 4. quæ addita ad vltimum reſiduum ſeruatum 6. faciunt 10. à quibus ſi reijciantur 7. remanent 3. in ſuperiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, ſi ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Recte ergo diuiſio facta eſt. Verum vtrumq; hoc examẽ fallax eſſe poteſt, ob ra-



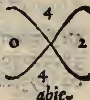
ob rationem dictam in superioribus.

TERTIVM examen, quod certum est, & cui nulla fallacia subesse potest, fit per multiplicationem. Si namque diuisor, & quotiens inter se multiplicentur, & numero producto addatur residuum diuisionis, si quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, si erratum in diuisione non est. Vt posterior duarum proximarum diuisionum ita examinabitur. Multiplicato diuisore 236. per Quotientem 193. antequã producti numeri addãtur inter se, scribatur sub ipsis numerus residuus diuisionis 130. prima nimirũ figura sub primo loco, & secunda sub secũdo, &c. Si enim numeros productos, & hoc residum in vnam summam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuisus fuit. Tertia probatio diuisionis per multiplicationem.

236
193
708
2124
236
130
45678

EXPEDIT interdum, cum, facta operatione aliqua in diuisione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuisionem vsque ad eum locum perductam examines, ne frustra vlterius progrediaris, si forte iam error aliquis commissus sit. Examinabis autem partem illam diuisionis nõ aliter, ac alias diuisiones, si omittas figuras numeri diuidendi, sub quibus nondum diuisor positus est. Vt in hac diuisione, facta prima operatione, eã ita examinabis p Expedit interdũ, ut diuisio nondum absoluta examinetur.

191
2123
67004456 (2
2808



abie-

abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuisore 2898. remanet 0. Item reiectis 9. ex Quotiente 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter se hisce residuis 0. & 2. producitur 0. quæ cifra in superiori parte crucis collocanda esset, nisi aliquid ex diuisione superesset: sed quoniã supersunt 913. reijciẽda sunt, 9. ex hoc residuo. Quo facto, renanebunt. 4. in suprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, si reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiso, omissis figuris 456. sub quibus nondum positus est diuisor.

Facilitas diuisionis qñ diuisor habet in principio aliquot cifras

QVOD si diuisor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuisio, si à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dextram, quot cifras habet diuisor, et reliquus numerus per diuisorẽ, dẽptis prius illis cifris, diuidat: Sed residuũ huius diuisionis, si quod erit, prꝑponendum est versus sinistrã figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autẽ erit diuisor totus vnà cũ cifris. Et si in diuisione nihil remansit, erunt figurę ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ.

```
   2
  278
  459
 13946 (367 7693/18000000
  3882
   33
```

vt si numerus 13946007693. diuidendus sit per 38000000. auferemus ex eo priores sex figuras 007693, ad dexteram, quot nimirum cifræ sunt

in

in principio diuiforis;& reliquū numerū 13945. per 38.diuidemus,omiſſis illis ſex cifris, vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. Quoniā vero in diuiſione nihil relictum eſt, ſcribemus ſupra diuiſorē numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad ſiniſtram nihil ſignificant, ac propterea omittendæ ſunt.

RVRSVS *ſi idē numerus 13946007693. diuidendus ſit per 300800000. auferemus ex eo priores quinque figuras 07693. quot videlicet cifræ ſunt in principio diuiſoris; & reliquum numerum 139460. per 3008. partiemur, omiſſis quinque illis cifris, vt factum eſt in hoc altero exēplo. Quia vero in diuiſione reliquus eſt hic numerus 1092. ſi eum verſus ſiniſtram præponamus hiſce figuris ablatis 07693. collocabimus ſupra diuiſorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.*

```
   09
  X1X42
 X3646Ø ( 46 109207693/300800000
  3ØØ88
   3ØØ
```

HINC *fit, ſi vltima figura diuiſoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem eſſe numerum diuidendum, ſublatis prius ab eo tot figuris verſus dexteram, quot cifræ ſunt in diuiſore; Numerator autem fractionis erit numerus ſublatus. Vt ſi numerus 4780920345. diuidendus ſit per 100000. erit Quotiens* $47809\frac{20345}{100000}$. *Sic etiam ſi numerus 9700203. diuidendus ſit per*

10000.

10000. *Quotiens erit* 970$\frac{2\ 2\ 2\ 1}{1\ 0\ 0\ 0\ 0}$. *atque ita de cæteris.*

Facilis aliquando fit diuisio. qñ diuidẽdus numerus habet aliquot cifras in principio.

N E Q V E *vero hoc prætereundum eſt, ſi numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequam tota diuiſio abſoluatur, nulla figura ſignificatiua in diuiſione relicta fuerit, ponẽdas tunc eſſe poſt Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nondum deletas. Vt ſi diuidendus proponatur numerus*

```
   112
  1328
   8630000000 (5400000
   2488
    34
```

1863000000. *per* 345. *quoniam poſt ſecundam operationem nihil in diuiſione remanſit, ſi poſt inuentum Quotientem* 54. *ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens* 5400000. *abſolutaq́, erit diuiſio.*

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuiſio fundaméta ſunt omnium, q̃ in Arithmetica traduntur.

E X *his quæ de additione, ſubtractione, multiplicatione, diuiſioneq́, numerorum integrorũ dicta ſunt, omnia, quæ in vniuerſa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilq́, aliud in quæſtionibus Arithmeticis ſoluendis præcipiendum ſit, quàm vt numeri vel addantur, ſubtrahanturve, aut multiplicentur, diuidanturve. Itaque niſi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe ſit exercitatus, fruſtra ſeſe ad alia, quæ tradituri ſumus, conferet.*

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

Cap. VI.



VEMADMODVM in superioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propositos in vnam summam collegimus, atque vnũ ab altero subduximus, duos item quoscunque inter se multiplicauimus, & denique vnũ per alterum sumus partiti; ita in his, quæ sequuntur, eadem efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractionesve dici solent vulgares.

EST autem Fractio, Minutiave, siue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuisi. Vt si totum aliquod sectum sit in quinque partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit vnã, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, si quis duas, tres, aut quatuor acceperit, dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus. Numerus fractus siue fractio Minutiaue quid.

CONSTAT qualibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes contineat fractio proposita ex illis, in quas totum, cuius est fractio, diuisum est. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fra- Numerator & Denominator fractionis quid.

ctionis, hoc est, indicat, in quotnam partes totum intelligitur esse diuisum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator est 3. quia significat, in illa fractione cõtineri tres partes totius; Denominator vero est 5. quia indicat, tres illas partes non esse qualescunque: sed quintas.

Fractio quo modo scribatur, & pronunciaetur.

SCRIBITVR autẽ qualibet fractio hoc modo. Denominator directò sub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumque numerũ, collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo scribuntur, $\frac{3}{5}$. pronuntiaturq; vterque numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda est; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{25}{48}$. ita, vigintiquinque quadragesimæoctauæ, significatque, totum aliquod diuisum esse in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinque ex illis acceptas esse.

Fractiones vnde oriantur.

ORIVNTVR plerunque numeri fracti ex residuo diuisionis integrorum numerorũ. Quando enĩ aliquid, in diuisione remansit fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator est diuisor, vt supra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens est 6. supersuntque 4. Fit ergo huiusmodi fractio, $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens sit $6\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator est numerus diuidẽdus, Denominator autem diuisor. Vt si diuidenda sint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$. significatque 4. diuisa esse per 7. ita vt Minutia hec $\frac{4}{7}$. sit septima pars huius numeri 4. Pars, inquã, de-

Quãdo minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

nominata à diuisore 7. Quemadmodum enim diuisis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars est numeri diuisi 12. Pars, inquam, à diuisore denominata; ita etiam cum diuidimus 4. per 7. fit Quotiēs $\frac{4}{7}$. qui septima pars est numeri diuisi 4. Pars inquam, denominata à diuisore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars est Numeratoris à Denominatore denominata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. est quarta pars ternarij. Nam si diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare si sumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex ijs, quæ paulo infra scribemus, manifestum erit. atque ita de alijs.

Fractio quęuis est pars Numeratoris à Denominatore denominata.

ÆSTIMATIO, SIVE VALOR fractorum numerorum Cap. VII.

MINVTIAE cuiusuis æstimatio, siue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: Vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. vel in his $\frac{1}{7}$. $\frac{2}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. quælibet posterior priore maior est, vt ex sequentibus patebit: & in prioribus quidem, manente semper eodem numeratore, denominator minuitur: in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarū valor quo pacto augeatur.

MINVTIAE vero cuiusuis æstimatio, siue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denomina-

Minutiarū valor quo pacto minuatur.

tore manente eodem, Numerator minuitur. Ut in his fractionibus. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. *vel in his,* $\frac{7}{8}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{3}{8}$. *qualibet posterior priore minor est, vt constabit ex sequentibus: & in prioribus quidem, eodem semper numeratore manente, denominator augetur; in posterioribus vero, eodẽ semper manente denominatore, numerator minuitur.*

Minutiæ, quarũ numeratores ad denominatores eandem habẽt proportionem, æquales sunt.

MINVTIAE deinde quæcunque, quarum vnius numerator ad suum denominatorem eandem habet proportionem, quã reliquarum numeratores habent ad suos denominatores, singuli ad singulos, inter se æquales sunt. Ut hæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{8}{16}$. $\frac{50}{100}$. $\frac{100}{200}$. $\frac{500}{1000}$. *omnes inter se æquales sunt; quia cuiusuis numerator ad suum denominatorem proportionem habet subduplam, id est, dimidia pars est ipsius. Sic etiam hæ,* $\frac{3}{4}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{36}{48}$. $\frac{90}{120}$. *Nam cuiuslibet numerator ad suum denominatorem habet proportionem subsesquitertiam, hoc est, tres quartas partes ipsius continet.*

Si numerator, ac denominator cuiusuis fractionis per quemcumque numerum multiplicetur, diuidatur ue, gignitur eiusdem valoris fractio.

QVONIAM vero, si duo numeri per eundem numerum multiplicentur, siue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionem, quam duo illi numeri multiplicati, siue diuisi; fit, vt multiplicatis, aut diuisis Numeratore, & Denominatore per quemcumque numerum, procreetur alia minutia eiusdem valoris, quamuis maiores, minoresue numeros habeat. Vt proposita hac minutia $\frac{6}{9}$. *si vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia* $\frac{18}{27}$ *eiusdem valoris. Sic etiam, si vterque numerus*

per

per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}$ eiusdem valoris. Et licet hæc omnia demonstrari possint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, si vno exẽplo ex his duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. desumpto, in quo veritas huius rei perspicue apparebit, rẽ illustremus. Nã si acccipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erũt duæ eius tertię partes æquales sex nonis partibus eiusdem. Cum enim tertia eius pars sit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars sit 1. erunt quoque sex nonę partes 6. Aequales igitur sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. & sic de alijs.

QVANDO porro numerator alicuius minutiæ denominatori est æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{2}{2}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{20}{20}$. $\frac{100}{100}$. constituit vnum integrum, hoc est, totum illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuisum est: propterea quòd in numeratore continentur omnes partes, in quas integrum, seu totum est diuisum. Quæ minutia vni integro æquiualeat.

QVANDO vero numerator minutiæ minor est denominatore, minor est illa minutia vno integro, quales sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{9}{10}$. quia cuilibet tot partes à suo denominatore denominata desunt ad integrum constituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abest. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}$. deest $\frac{1}{3}$. huic vero $\frac{4}{7}$. desunt $\frac{3}{7}$. & huic, $\frac{9}{10}$. deest $\frac{1}{10}$. Quæ minutia minor sit vno integro.

QVANDO denique numerator minutiæ denominatore maior est, maior est illa minutia Quæ minutia maior sit vno integro.

vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}$. $\frac{24}{7}$. $\frac{100}{4}$. quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quàm sint illæ, in quas totum, siue integrum diuisum est.

Vtra duarũ minutiarũ maior sit, quo pacto cognoscatur.

IAM vero propositis duabus minutijs, vt cognoscas, vtra illarum maior sit, seruabis hanc regulam. Positis minutijs ordine, multiplica earum numeros in crucem, id est, numeratorem prioris in posterioris denominatorem, & posterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos supra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quòd si duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoq; erunt minutiæ propositæ minutiæ. Vt in primo horum trium exem-

16.	18.	41.	40.	48.	48.
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{20}{41}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{16}$

plorũ maior est posterior minutia $\frac{6}{8}$. quàm prior $\frac{2}{3}$. quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris maior est, quàm numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem posterioris productus. In secundo vero exemplo maior est minutia $\frac{1}{2}$. quàm $\frac{20}{41}$. In tertio denique æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. & $\frac{12}{16}$. vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ est, quòd, cum numeratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio sit numeratorum ad deno-

mina-

minatores, vt constat ex propos. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt supra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerũ, ad suum denominatorem habere maiorẽ proportionem, ac proinde illam minutiam esse maiorem, vt supra dictum est. Sed vt exemplo etiam discas, maiorem esse minutiam $\frac{6}{8}$. quàm $\frac{2}{3}$. sumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harum minutiarum denominatas, nempe octauam, & tertiam. Itaque cum vna octaua pars huius numeri 48. sit 6. erunt sex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiusdem numeri sit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor est, quàm 36.

QVOD si data sit minutia cuiuspiã monetę, vel ponderis, aut mensuræ maioris, cupiasq́; valorem eius explorare in minori moneta, vel põdere, aut mensura, hoc est, reuocare eam ad minorẽ monetam &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorẽ per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda est fractio, in maiori continetur, productumq́; numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datę minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & mensuris intellige. Vt si data sit hæc minutia aureorum $\frac{4}{7}$. quæ significat, vt supra cap. 6. diximus, quatuor aureos in septem æquales partes distributos, redigẽdaq́; sit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac nostra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini efficiunt v-

Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, põdere vel mẽsura exploretur.

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid significet.

12, & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemusque 9. vncias.

POSTREMO inquirendũ sit, quot Minuta contineãtur in $\frac{5}{6}$. vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 300. per denominatorem 6. diuidimus; efficiemusque Minuta 50.

FRACTIONES FRACTORVM numerorum. Cap VIII.

Minutiæ minutiarũ vnde oriantur.

NON solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones simplices, de quibus hic agimus, procreentur; verum etiam interdum ipsi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes distribui, ac si essent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumve numerorum, siue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cũ accipio quatuor partes alicuius totius in septem partes distributi, efficio hanc minutiam simplicem $\frac{4}{7}$. quæ significat quatuor septimas partes ipsius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem simplicem $\frac{4}{7}$. diuisam esse in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor septimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, scribaturque, sicut minutiæ simplices, posterior vero pronuncietur in obliquo, noteturq; sine interiectione lineæ, vt ab alijs distinguatur. Vt prædicta minutia

Minutia Minutiæ quid.

Minutiæ minutiarũ quomodo pronunciẽtur, & scribantur.

nutia minutiæ ita ſcribēda eſt $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$ .pronūciaturque ſic. Tres quintæ quatuor ſeptimarū vnius integri. Hæc autē minutia minutiarū $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$ .ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna ſexta parte vnius dimidij alicuius integri: ſignificat autem ex dimidio alicuius integri ſumptam eſſe vnam ſextā partē illius dimidij in ſex æquales partes diſtributi ; & ex hac ſexta parte in quatuor partes ęquales diuiſa acceptas eſſe tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuiſis in tres æquales partes ſumptas eſſe duas tertias. Eademque ratio eſt in alijs.

QVO pacto autem æſtimatio, ſiue ualor fractionum fractorum numerorum cognoſcatur, docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad ſimplices fractiones reuocabimus.

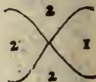
REDVCTIO FRACTORVM numerorum ad minimos numeros, ſiue terminos. Cap. IX.

ACCIDIT nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris ſcribatur, vt commode minoribus poſſit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{3}{7}\frac{6}{2}$. æquiualet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expreſſæ. Operæpretium eſt autem minutiam maioribus numeris ſcriptam ad minimos numeros, terminosve reuocare, multas ob cauſas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expreſſa intelligitur, quàm maioribus numeris ſcripta. Quis enim

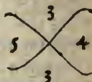
Cur minutiæ ad minimos terminos reducantur.

ſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit, eodem modo reijciatur 7. & reſiduum adijciatur ad illud reſiduum, quod in examine per abiectionem 9. addendum eſſe diximus reſiduo diuiſionis, atque ex aggregato reijciantur 7.

VT prior proximarum duarum diuiſionũ ita examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiente 176. remanet 1. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 1. inter ſe, procreantur 2. in ſuperiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuiſione ſuperfuit. Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiam 2. recte facta eſt diuiſio.



POSTERIOR vero diuiſio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 236. remanent 5. Item abiectis 7. ex Quotiente 193. ſuperſunt 4. Multiplicatis autẽ duobus hiſce reſiduis 5. & 4. inter ſe, & ex producto 20. reiectis 7. relinquuntur 6. quæ, ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in parte crucis ſuperiore: ſed quoniã reliquus fuit numerus 130. ex quo ſi abijciantur 7. ſuperſunt 4. quæ addita ad vltimum reſiduum ſeruatum 6. faciunt 10. à quibus ſi reijciantur 7. remanent 3. in ſuperiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, ſi ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Recte ergo diuiſio facta eſt. Verum vtrumq; hoc examẽ fallax eſſe poteſt, ob ra-



ob rationem dictam in superioribus.

TERTIVM examen, quod certum est, & cui nulla fallacia subesse potest, fit per multiplicationem. Si namque diuisor, & quotiens inter se multiplicentur, & numero producto addatur residuum diuisionis, si quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, si erratum in diuisione non est. Vt posterior duarum proximarum diuisionum ita examinabitur. Multiplicato diuisore 236. per Quotientem 193. antequã producti numeri addãtur inter se, scribatur sub ipsis numerus residuus diuisionis 130. prima nimirũ figura sub primo loco, & secunda sub secũdo, &c. Si enim numeros productos, & hoc residuum in vnam summam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuisus fuit.

Tertia probatio diuisionis per multiplicationem.

236
193
708
2124
236
130
45678

EXPEDIT interdum, cum, facta operatione aliqua in diuisione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuisionem vsque ad eum locum perductam examines, ne frustra vlterius progrediaris, si forte iam error aliquis commissus sit. Examinabis autem partem illam diuisionis nõ aliter, ac alias diuisiones, si omittas figuras numeri diuidendi, sub quibus nondum diuisor positus est. Vt in hac diuisione, facta prima operatione, eã ita examinabis p

Expedit interdũ, ut diuisio nondum absoluta examinetur.

x91
xxx3
ϕ7ϕϕ456 (2
x8ϕ8

0 4 2 4

abie-

abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuisore 2898. remanet 0. Item reiectis 9. ex Quotiente 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter se hisce residuis 0. & 2. producitur 0. quæ cifra in superiori parte crucis collocanda esset, nisi aliquid ex diuisione superesset: sed quoniã supersunt 913. reijciẽda sunt, 9. ex hoc residuo. Quo facto, renanebunt. 4. in suprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, si reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiso, omissis figuris 456. sub quibus nondum positus est diuisor.

Facilitas diuisionis qñ diuisor habet in principio aliquot cifras.

QVOD *si diuisor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuisio, si à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dextram, quot cifras habet diuisor, et reliquus numerus per diuisorẽ, dẽptis prius illis cifris, diuidat: Sed residuũ huius diuisionis, si quod erit, pręponendum est versus sinistrã figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autẽ erit diuisor totus vnà cũ cifris. Et si in diuisione nihil remansit, erunt figurę ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ.*

```
    2
   278
   458
 13946 (367 769 3
   388          1 8 0 0 0 0 0 0
   33
```

vt si numerus 13946007693. diuidendus sit per 38000000. auferemus ex eo priores sex figuras 007693, ad dexteram, quot nimirum cifræ sunt

in

in principio diuisoris; & reliquũ numerũ 13946. per 38. diuidemus, omissis illis sex cifris, vt in hoc apposito exemplo factum est. Quoniã vero in diuisione nihil relictum est, scribemus supra diuisorẽ numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad sinistram nihil significant, ac propterea omittendæ sunt.

RVRSVS *si idẽ numerus 13946007693. diuidendus sit per 300800000. auferemus ex eo priores quinque figuras 07693. quot videlicet cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquum numerum 139460. per 3008. partiemur, omissis quinque illis cifris, vt factum est in hoc altero exẽplo. Quia vero in diuisione reliquus est hic numerus 1092. si eum versus sinistram præponamus his ce figuris ablatis 07693. collocabimus supra diuisorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.*

```
  09
 11142
139460 (46 109207693/300800000
 30088
  300
```

HINC *fit, si vltima figura diuisoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem esse numerum diuidendum, sublatis prius ab eo tot figuris versus dexteram, quot cifræ sunt in diuisore; Numerator autem fractionis erit numerus sublatus. Vt si numerus 4780920345. diuidendus sit per 100000. erit Quotiens 47809 $\frac{20345}{100000}$. Sic etiam si numerus 9700203. diuidendus sit per*

10000.

10000. *Quotiens erit* 970$\frac{[illegible]}{10000}$. *atque ita de cæteris.*

Facilis aliquando fit diuisio. qn̄ diuidēdus numerus habet aliquot cifras in principio.

N E Q V E *vero hoc prætereundum est, si numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequam tota diuisio absoluatur, nulla figura significatiua in diuisione relicta fuerit, ponēdas tunc esse post Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nondum deletas. Vt si diuidendus proponatur numerus*

```
    112
   1338
    8630000000 (5400000
    3488
     34
```

1863000000. *per* 345. *quoniam post secundam operationem nihil in diuisione remansit, si post inuentum Quotientem* 54. *ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens* 5400000. *absolutaq́, erit diuisio.*

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio fundamēta sunt omnium, q̄ in Arithmetica traduntur.

E X *his quæ de additione, subtractione, multiplicatione, diuisioneq́, numerorum integrorū dicta sunt, omnia, quæ in vniuersa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilq́, aliud in quæstionibus Arithmeticis soluendis præcipiendum sit, quàm vt numeri vel addantur, subtrahantur ve, aut multiplicentur, diuidantur ve. Itaque nisi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe sit exercitatus, frustra sese ad alia, quæ tradituri sumus, conferet.*

NVME-

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

Cap. VI.



VEMADMODVM in superioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propositos in vnam summam collegimus, atque vnũ ab altero subduximus, duos item quoscunque inter se multiplicauimus, & denique vnũ per alterum sumus partiti; ita in his, quæ sequuntur, eadem efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractionesve dici solent vulgares.

EST autem Fractio, Minutiave, siue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuisi. Vt si totum aliquod sectum sit in quinque partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit vnã, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, si quis duas, tres, aut quatuor acceperit, dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus. Numerus fractus, siue fractio Minutia quid.

CONSTAT qualibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes contineat fractio proposita ex illis, in quas totum, cuius est fractio, diuisum est. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, Numerator & Denominator fractionis quid.

ctionis, hoc est, indicat, in quotnam partes totum intelligitur esse diuisum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator est 3. quia significat, in illa fractione cōtineri tres partes totius; Denominator vero est 5. quia indicat, tres illas partes non esse qualescunque: sed quintas.

Fractio quis, quo pacto scribat, & pronunciatur.

SCRIBITVR autē qualibet fractio hoc modo. Denominator directò sub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumque numerū, collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo scribuntur, $\frac{3}{5}$. pronuntiaturq; vterque numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda est; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{25}{48}$. ita, vigintiquinque quadragesimæoctauæ, significatque, totum aliquod diuisum esse in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinque ex illis acceptas esse.

Fractiones vnde orian tur.

ORIVNTVR plerunque numeri fracti ex residuo diuisionis integrorum numerorū. Quando em̄ aliquid, in diuisione remansit fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator est diuisor, vt supra diximus. vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens est 6. supersuntque 4. Fit ergo huiusmodi fractio, $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens sit 6 $\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator est numerus diuidēdus, Denominator autem diuisor. Vt si diuidenda sint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$. significatque 4. diuisa esse per 7. ita vt Minutia hec $\frac{4}{7}$. sit septima pars huius numeri 4. Pars, inquā, de-

Quādo minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

nominata à diuisore 7. Quemadmodum enim diuisis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars est numeri diuisi 12. Pars, inquam, à diuisore denominata; ita etiam cum diuidimus 4. per 7. fit Quotiès $\frac{4}{7}$. *qui septima pars est numeri diuisi 4. Pars inquam, denominata à diuisore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars est Numeratoris à Denominatore denominata. Vt hæc Minutia* $\frac{3}{4}$. *est quarta pars ternarij. Nam si diuidantur 3. per 4. fit Quotiens* $\frac{3}{4}$. *Quare si sumatur Minutia* $\frac{3}{4}$. *quater, efficientur* $\frac{12}{4}$. *quæ ternario æquiualent, vt ex ijs, quæ paulo infra scribemus, manifestum erit. atque ita de alijs.*

Fractio quęuis est pars Numeratoris à Denominatore denominata.

ÆSTIMATIO, SIVE VALOR fractorum numerorum Cap. VII.

M*INVTIAE cuiusuis æstimatio, siue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: Vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus* $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. *vel in his* $\frac{1}{7}$. $\frac{2}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. *quælibet posterior priore maior est, vt ex sequentibus patebit: & in prioribus quidem, manente semper eodem numeratore, denominator minuitur: in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator augetur.*

Minutiarũ valor quo pacto augeatur.

MINVTIAE vero cuiusuis æstimatio, siue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore

Minutiarũ valor quo pacto minuatur.

tore manente eodem, Numerator minuitur. Vt in his fractionibus. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. *vel in his,* $\frac{7}{8}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{3}{8}$. *quælibet posterior priore minor est, vt constabit ex sequentibus: & in prioribus quidem, eodem semper numeratore manente, denominator augetur; in posterioribus vero, eodẽ semper manente denominatore, numerator minuitur.*

Minutiæ, quarũ numeratores ad denominatores eandem habẽt proportionem, æquales sunt.

MINVTIAE deinde quæcunque, quarum vnius numerator ad suum denominatorem eandem habet proportionem, quã reliquarum numeratores habent ad suos denominatores, singuli ad singulos, inter se æquales sunt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{8}{16}$. $\frac{50}{100}$. $\frac{100}{200}$. $\frac{500}{1000}$. *omnes inter se æquales sunt; quia cuiusuis numerator ad suum denominatorem proportionem habet subduplam, id est, dimidia pars est ipsius. Sic etiam hæ,* $\frac{3}{4}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{36}{48}$. $\frac{90}{120}$. *Nam cuiuslibet numerator ad suum denominatorem habet proportionem subsesquitertiam, hoc est, tres quartas partes ipsius continet.*

Si numerator, ac denominator cuiusuis fractionis per quemcumque numerum multiplicetur, diuidatur ue, gignitur eiusdem valoris fractio.

QVONIAM vero, si duo numeri per eundem numerum multiplicentur, siue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionem, quam duo illi numeri multiplicati, siue diuisi; fit, vt multiplicatis, aut diuisis Numeratore, & Denominatore per quemcumque numerum, procreetur alia minutia eiusdem valoris, quamuis maiores, minoresue numeros habeat. Vt proposita hac minutia $\frac{6}{9}$. *si vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia* $\frac{18}{27}$ *eiusdem valoris. Sic etiam, si vterque numerus*

per

per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}$ eiuſdem valoris. Et licet hæc omnia demonſtrari poſſint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, ſi vno exẽplo ex his duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. deſumpto, in quo veritas huius rei perſpicue apparebit, rẽ illuſtremus. Nã ſi acccipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erũt duæ eius tertię partes æquales ſex nonis partibus eiuſdem. Cum enim tertia eius pars ſit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars ſit 1. erunt quoque ſex nonę partes 6. Aequales igitur ſunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. & ſic de alijs.

QVANDO porro numerator alicuius minutiæ denominatori eſt æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{2}{2}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{20}{20}$. $\frac{100}{100}$. conſtituit vnum integrum, hoc eſt, totum illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuiſum eſt: propterea quòd in numeratore continentur omnes partes, in quas integrum, ſeu totum eſt diuiſum. **Quæ minutia vni integro æquiualeat.**

QVANDO vero numerator minutiæ minor eſt denominatore, minor eſt illa minutia vno integro, quales ſunt hæ minutiæ. $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{9}{10}$. quia cuilibet tot partes à ſuo denominatore denominatæ deſunt ad integrum conſtituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abeſt. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}$. deeſt $\frac{1}{3}$. huic vero $\frac{4}{7}$. deſunt $\frac{3}{7}$. & huic, $\frac{9}{10}$. deeſt $\frac{1}{10}$. **Quæ minutia minor ſit vno integro.**

QVANDO denique numerator minutiæ denominatore maior eſt, maior eſt illa minutia **Quæ minutia maior ſit vno integro.**

vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}$. $\frac{14}{7}$. $\frac{100}{4}$. *quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quàm sint illæ, in quas totum, siue integrum diuisum est.*

Vtra duarũ minutiarũ maior sit, quo pacto cognoscatur.

IAM vero propositis duabus minutijs, vt cognoscas, vtra illarum maior sit, seruabis hanc regulam. Positis minutijs ordine, multiplica earum numeros in crucem, id est, numeratorem prioris in posterioris denominatorem, & posterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos supra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quòd si duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoq; erunt minutiæ propositæ minutiæ. Vt in primo horum trium exem-

16.		18.	41.		40.	48.		48.
$\frac{2}{3}$	×	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{2}$	×	$\frac{20}{41}$	$\frac{3}{4}$	×	$\frac{12}{16}$

plorũ maior est posterior minutia $\frac{6}{8}$. *quàm prior* $\frac{2}{3}$. *quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris maior est, quàm numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem posterioris productus. In secundo vero exemplo maior est minutia* $\frac{1}{2}$. *quàm* $\frac{20}{41}$. *In tertio denique æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}$. & $\frac{12}{16}$. *vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ est, quòd, cum numeratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio sit numeratorum ad deno-*

mina-

minatores, vt constat ex propos. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt supra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerũ, ad suum denominatorem habere maiorẽ proportionem, ac proinde illam minutiam esse maiorem, vt supra dictum est. Sed vt exemplo etiam discas, maiorem esse minutiam $\frac{6}{8}$. quàm $\frac{2}{3}$. sumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harum minutiarum denominatas, nempe octauam, & tertiam. Itaque cum vna octaua pars huius numeri 48. sit 6. erunt sex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiusdem numeri sit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor est, quàm 36.

QVOD si data sit minutia cuiuspiã monetæ, vel ponderis, aut mensuræ maioris, cupiasq́; valorem eius explorare in minori moneta, vel põdere, aut mensura, hoc est, reuocare eam ad minorẽ monetam &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorẽ per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda est fractio, in maiori continetur; productumq́; numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & mensuris intellige. Vt si data sit hæc minutia aureorum $\frac{4}{7}$. quæ significat, vt supra cap. 6. diximus, quatuor aureos in septem æquales partes distributos, redigẽdaq́; sit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac nostra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini efficiunt v- Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, põdere vel mẽsura exploretur. Iulius, Baioch⁹, & Quatrin⁹ apud Romanos quid significet.

num baiochum, & 10. baiochi vnum Iuliũ, ac 10. Iulij vnum aureum nummum.) multiplicabimus numeratorem 4. per 10. quoniam 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diuisos redigamus ad 40. Iulios; numerumq́; productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. *Quod si hanc minutiam Iuliorum,* $\frac{5}{7}$. *quæ significat 5. Iulios in 7. partes æquales diuisos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus quoque numeratorem 5. per 10. quia 10. baiochi vnum etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes æquales distributos redigamus ad 50. baiochos: productumq́; numerum 50. per denominatorem eundem 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos* $7\frac{1}{7}$. *Si tandem minutiam hanc baiochorum,* $\frac{1}{7}$. *quæ significat vnum baiochum diuisum in 7. partes æquales, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorem 1. per 4. quòd 4. quatrini efficiant vnum baiochum, vt illum baiochum in 7. partes æquales diuisum ad 4. quatrinos reducamus, numerumq́; productum 4. per denominatorem 7. partiemur, efficiemusq́;* $\frac{4}{7}$. *vnius quatrini, hoc est, paulo plus, quàm dimidiũ vnius quatrini. Itaque* $\frac{4}{7}$. *vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos* $\frac{4}{7}$. *Si vero* $\frac{4}{7}$. *vnius aurei redigere statim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum constituunt, vt 4. illos aureos in 7. partes distributos redigamus ad 400. baiochos, numerumq́; productũ 400.*

per

per denominatorem 7. partiemur, efficiemusq́; baiochos 57 $\frac{1}{7}$.

RVRSVS si explorandum sit, quot passus, pedes, palmos, digitosve contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, statuendo milliarium vnum constare 1000. passibus Geometricis, passum vero 5. pedibus, & pedem 4. palmis, palmum autem 4. digitis, & digitum 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorem 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes æquales distributa redigantur ad passus 5000. productumq́; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemusq́; 750. passus.

SIC etiam si $\frac{10}{13}$. vnius passus reducere velimus ad pedes, multiplicabimus numeratorē 10. per 5. productumq́; numerum 50. per denominatorem 13. partiemur, efficiemusq; pedes 3 $\frac{11}{13}$. Si rursus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumq́; productum 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos 3 $\frac{5}{13}$. Item si hunc numeratorem 5. per 4. multiplicemus, productumq́; numerum 20. per denominatorem 13. partiamur, inueniemus digitos 1 $\frac{7}{13}$. Tandem si numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productum 28. diuidamus per denominatorem 13. reperiemus grana hordei 2 $\frac{2}{13}$. Itaque $\frac{10}{13}$. vnius passus continent pedes 3. palmos 3. digitum 1. & grana 2 $\frac{2}{13}$.

ITEM reducēda sit minutia hæc, $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12. vnciæ vnam librā constituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per

12. &

12, *& productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemusque 9. vncias.*

POSTREMO inquirendũ sit, quot Minuta continẽãtur in $\frac{5}{6}$. vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 300. per denominatorem 6. diuidimus, efficiemusque Minuta 50.

FRACTIONES FRACTORVM numerorum. Cap VIII.

Minutia minutiarũ vnde oriantur.

NON solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones simplices, de quibus hic agimus, procreentur; verum etiam interdum ipsi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes distribui, ac si essent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumve numerorum, siue Minutię minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cũ accipio quatuor partes alicuius totius in septem partes distributi, efficio hanc minutiam simplicem $\frac{4}{7}$. quæ significat quatuor septimas partes ipsius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem simplicem $\frac{4}{7}$. diuisam esse in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor septimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, scribaturque, sicut minutiæ simplices, posterior vero pronuncietur in obliquo, noteturq; sine interiectione lineæ, vt ab alijs distinguatur. Vt prędicta minutia

Minutia Minutiæ quid.

Minutiæ minutiarũ quomodo pronuncientur, & scribantur.

nutia minutiæ ita scribēda est $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. pronūciaturque sic. Tres quintæ quatuor septimarū vnius integri. Hæc autē minutia minutiarū $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna sexta parte vnius dimidij alicuius integri: significat autem ex dimidio alicuius integri sumptam esse vnam sextā partē illius dimidij in sex æquales partes distributi; & ex hac sexta parte in quatuor partes ęquales diuisa acceptas esse tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuisis in tres æquales partes sumptas esse duas tertias. Eademque ratio est in alijs.

QVO pacto autem æstimatio, siue ualor fractionum fractorum numerorum cognoscatur, docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad simplices fractiones reuocabimus.

REDVCTIO FRACTORVM numerorum ad minimos numeros, siue terminos. Cap. IX.

ACCIDIT nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris scribatur, vt commode minoribus possit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{2}$. æquiualet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expressæ. Operæ pretium est autem minutiam maioribus numeris scriptam ad minimos numeros, terminosve reuocare, multas ob causas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expressa intelligitur, quàm maioribus numeris scripta. Quis enim

Cur minutiæ ad minimos terminos reducantur.

enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. *quàm* $\frac{16}{72}$. *aut quàm* $\frac{500}{1000}$. *aut quàm* $\frac{826}{1652}$. *cum tamē omnes idem prorſus ſignificent? Deinde, quoniā facilior redditur operatio fractionum, ſi ad minimos terminos ſint reductæ, vt ex ſequentibus fiet perſpicuum. Tertio, vt Mathematicorum libri, qui minutias plerunque minimis ſolent numeris notare, intelligantur. Si enim, verbi gratia, quis inueniat à quopiam ſcriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuiſum facere Quotientem* $52\frac{2}{3}$. *ipſe vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem* $52\frac{32}{48}$. *qui ab illo differre videtur, cum tamen idem ſit. Minutia enim hæc* $\frac{32}{48}$. *ad minimos terminos reducta facit* $\frac{2}{3}$. *Quare antequam iudicet, ſe, aut ſcriptorem illum erraſſe, quòd videat eius minutiam à ſua differre, reducenda prius erit minutia à ſe inuenta, & maioribus terminis expreſſa, ad minimos numeros, ſiue terminos.*

Minutiæ, qua arte ad minimos numeros redigantur.

HAC autem arte Minutia quæuis maioribus ſcripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quàm denominator per maximam communem vtriuſq; menſuram, id eſt, per maximum numerum, qui vtrūque metiatur: Quotientes enim numeri (ſi Quotientem numeratoris facias numeratorem, & Quotientem denominatoris denominatorem) dabunt minutiam illi æquiualentem, & minimis numeris expreſſam. Nam cum, diuiſis duobus numeris per vnum & eundem numerum, Quotientes eandem habeant proportionem, quam illi numeri,

meri, sint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omnium minimi, quòd numeri minutiæ propositæ diuisi sint per maximum numerum eos numerantem, ita vt per maiorem diuidi nequeāt, quin aliquid in diuisione relinquatur; perspicuum est, minutiam inuentam minimis numeris esse expressam, ita vt minoribus exprimi nequeat.

EXEMPLVM sit in hac minutia proposita, $\frac{32}{48}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & præterea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis est, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. non metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui maior adhuc est, metiatur numeratorem 32. nullo tamen modo denominatorem 48. numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximum numerantem, qui vtrumque numerum minutiæ propositæ, id est, tam numeratorem, quàm denominatorem, numeret. Si igitur tam numerator 32. quàm denominator 48. diuidatur per maximum illorum numerorum, nimirum per 16. reperientur Quotientes 2. & 3. Quare minutia proposita $\frac{32}{48}$. reducetur ad hanc æquiualentem, $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expressam. Si eosdem numeros propositæ minutiæ diuideres per aliū numerū eos numerantē, qui non sit maximus, redigeres quidē minutiā ad aliā æqualem minoribus terminis expressam, sed non minimis. Vt si ijdē numeri 32. et 48. diuidātur per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. q̃ minoribus adhuc numeris scribi pōt, hoc modo $\frac{2}{3}$.

EA-

EADEM ratione hæc minutia, $\frac{45}{60}$. cuius numeratorem, & denominatorem metiuntur omnes hi numeri 3.5.15: redigetur ad hanc, $\frac{3}{4}$. si nimirum tam numerator, quàm denominator per 15. qui maximus numerus est illos numerans, diuidatur. atque ita de reliquis.

Quando minutia nõ põt redigi ad minimos terminos.

QVOD si alicuius minutiæ numeratorem, ac denominatorem nullus numerus, præter vnitatem, numeret, non poterit ad minores terminos redigi minutia illa, sed iã minimis numeris expressa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{20}{39}$. $\frac{20}{63}$. $\frac{47}{59}$. ad minores terminos reuocari non possunt. Quamuis enim hi numeri 2.4.5.10. numeratorẽ primæ minutię numerent, nullus tamen eorum eiusdem denominatorem metitur. Item licet hi numeri 3.13. metiantur denominatorem eiusdem minutiæ, neuter tamen eorum eius numeratorẽ metitur. Rursus quãuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem secundæ minutiæ, hi vero 3.7.9.21. denominatorem eiusdem metiantur, nullus tamen illorum vtrumque numerum: id est, tam numeratorem, quam denominatorem illius minutiæ, numerat. Postremę autem minutiæ numeros nullus numerus præter vnitatẽ numerat, cum sint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quemadmodum & primarũ duarum numeri sunt inter se primi, quamuis nullus eorum primus sit. Dicitur enim numerus primus, quem vnitas sola metitur; Primi vero inter se numeri vocantur, quos sola vnitas, communis mensura, metitur.

Primus numerus & primi inter se numeri quid.

QVONIAM vero, vt minutia proposita

ad

ad minimos terminos reuocetur, necesse est, vt maxima mensura communis numeratoris, ac denominatoris inueniatur, (Per hanc enim maximam cōmunem mensuram vterque numerus, tam numerator, quàm denominator, diuidendus est, vt diximus.) tradi solet ad eã inueniendã hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem: Et si aliquid in diuisione relictum fuerit, diuidatur diuisor, id est, numerator, per residuum illud diuisionis: Et si rursus aliquid remanserit, diuidatur vltimus hic diuisor, id est, residuum illud, per residuum huius vltimæ diuisionis; & sic semper vltimus diuisor per vltimum residuum diuidatur, donec diuisor occurrat, qui nihil in diuisione relinquat. Hic namque diuisor nihil relinquens erit maxima communis mensura numeratoris, ac denominatoris minutiæ propositæ. Quòd si diuisor aliquis in huiusmodi diuisionibus relinquat vnitatem, nō habebunt numerator, & denominator minutiæ propositæ communem mensuram, præter vnitatē, sed erunt numeri inter se primi.

Qua rōne maxima mensura communis numeratoris, ac denominatoris cuiusuis minutiæ reperiatur.

Quãdo numerator, & denominator datę minutiæ non habeant cō munē mensuram, præter vnitatē.

VT si proposita sit minutia $\frac{36}{72}$. inueniemus maximam mensuram communem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. & quoniam, hac diuisione peracta, nihil remanet, erit diuisor hic 36. maxima communis mensura; per quam si diuidamus numeratorem, denominatoremq́; datæ minutiæ $\frac{36}{72}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expressam.

RVRSVS si data sit minutia $\frac{60}{96}$. reperiemus

riemus maximam communem mensuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiso denominatore 96. per numeratorem 60. superſunt in diuiſione 36. Diuiſo rurſus diuiſore 60. per reſiduum 36. remanent in diuiſione 24. Item diuiſo hoc vltimo diuiſore 36. per vltimum reſiduum 24. relinquuntur 12. diuiſo denique vltimo hoc diuiſore 24. per vltimum reſiduum 12. nihil ſupereſt. Eſt igitur maxima menſura communis 12. per quam ſi diuidatur tam numerator, quàm denominator datæ minutiæ $\frac{60}{96}$. *conſtituetur hæc minutia* $\frac{5}{8}$. *minimis numeris expreſſa.*

SED *ſi proponatur hæc minutia* $\frac{48}{103}$. *non inuenietur vlla communis menſura numeratoris, & denominatoris maior, quàm vnitas. Nam denominatore 103. diuiſo per numeratorem 48. ſuperſunt 7. Diuiſo item diuiſore 48. per reſiduum 7. relinquuntur 6. Denique diuiſo vltimo hoc diuiſore 7. per vltimum reſiduum 6. ſupereſt 1. Quare, vt ſupra dictum eſt, numerator, & denominator minutiæ huius* $\frac{48}{103}$. *ſunt numeri inter ſe primi.*

Inuẽtio maximæ menſuræ quorũlibet duorũ numerorũ.

EADEM *ratione quorumlibet duorum numerorum (licet fractionem non conſtituant, ſed abſolute proponantur.) maximam communẽ menſuram inueniemus, ſi maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuiſorem per reſiduum diuiſionis, ſi quod erit; & rurſus hunc vltimum diuiſorem per reſiduum vltimæ diuiſionis; & ſic deinceps, &c. Nã vltimus diuiſor nihil relinquens in diuiſione erit maxima communis menſura datorum*

torum numerorum : Si vero in diuisione aliqua fuerit relicta vnitas, erunt numeri dati inter se primi, nullamq; habebunt mensuram communem, præter vnitatem.

COLLIGITVR hæc regula inueniendi maximam mensuram communem duorum numerorum ex propos. 2. lib. 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat semper minorem numerum de maiore subtrahere, tamen idem efficitur, & quidē multo breuius, per diuisionem maioris numeri per minorem, cum diuisio sit compendiosa quædam subtractio, quemadmodum & multiplicatio compendiosa quædam additio est.

Vnde colligatur regula inueniendi maximā mensuram duorū numerorum.

ALIO modo reducetur minutia proposita ad minimos terminos, si tam numerator, quàm denominator per communem aliquam eorum mensuram notam, etiamsi maxima non sit, diuidatur, vt inueniatur minutia sub minoribus numeris: Et rursus huius inuentæ minutiæ tam numerator, quàm denominator per aliam communem eorum mensuram diuidatur; & sic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator, & denominator sint numeri inter se primi. Vt proposita minutia hac $\frac{36}{48}$. *si vterque eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia* $\frac{18}{24}$. *cuius vterq; numerus si diuidatur per 3. reperietur hæc minutia* $\frac{6}{8}$. *cuius tandem numeri diuisi per 2. offerent hanc minutiam* $\frac{3}{4}$. *sub minimis terminis: sed prior illa ratio præstantior est, ac breuior.*

Alia ratio redigendarū minutiarū ad minimos terminos.

REDVCTIO FRACTORVM NVmerorum ad eandem denominationem, & ad integra, necnon integrorum ad fractionem quamcunque, ac denique fractionum fractorum numerorum ad simplices fractiones. Cap. X.

SAEPENVMERO reducendæ sunt fractiones diuersorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales sint, singulæ singulis, habeantq; eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primum quidē, quādo propositæ minutiæ non sunt plures, quàm duæ, deinde vero, quando plures sunt.

Quo pacto duæ minutiæ ad eandē denominationē reducantur.

PROPOSITIS igitur duabus minutijs diuersos denominatores habentibus, si denominatores inter se multiplicentur, procreabitur communis denominator, ad quem datæ minutiæ sunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucem per denominatorem alterius multiplicatus producet numeratorem. vt in hic apposito exemplo. Ex denominatore $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. *reducuntur ad* $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. *3. in denominatorem 4. fit denominator communis 12. Itē ex 2. numeratore prioris minutiæ in 4. denominatorem posterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ* $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. *ad has duas* $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. *reducuntur, quæ illis æquales sunt, habentq; vnum & eundem*

deno-

denominatorē cōem 12. Quòd enim $\frac{8}{1}\frac{}{2}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. constat ex propos. 17. & 18. lib. 7. Eucl. propterea ꝙ vterq; numerus huius multiplicatus per eundē numerū 4. vel multiplicās eundē numerū 4. nimirū denominatorē posterioris minutiæ ꝓpositę, produxit vtrūque numerū illius. Hinc em̄ fit, numeratorē & denominatorē minutiæ $\frac{8}{1}\frac{}{2}$. eandem habere proportionem, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipsæ, vt supra diximus. Eadem ratione æquales erunt minutiæ $\frac{9}{1}\frac{}{2}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterque numerus huius multiplicatus per eundem numerum 3. vel multiplicans eundem numerum 3. denominatorem videlicet prioris minutiæ datæ, produxit vtrumque numerum illius.

SI vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationem proponantur reducendæ, quęrendus est primum numerus ab omnibus denominatoribus datarum minutiarum numeratus, ita vt omnes partes ab ipsis denominatas contineat. Ita autem numerum à denominatoribus propositis, vel a quibuscunque numeris datis numeratū inueniemus. Multiplicentur omnes denominatores inter se, ducendo primum in secundum, & hūc numerum productum in tertium, productumque hunc numerum in quartum, & sic deinceps, donec omnes sint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propositis hisce minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. si primus denominator 2. in secundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, produ-

Inuentio numeri a quotcunq; datis numeris numerati.

Eiusque numerus 24. in quartū 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quem dati denominatores, nempe numeri 2. 3. 4. 5. numerant.

QVONIAM vero numerus hac ratione inuentus interdū ita magnus est, vt eo minor dari posset, qui ab eisdem propositis denominatoribus numeretur, reperiemus minimū numerum à quotcunque numeris numeratū hoc modo. Primū inueniemus minimum numerū à prioribus duobus numeris propositis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent communem aliquam mensuram, præter vnitatem, aut non: (Quod quidem cognosces, si maior per minorem diuidatur, & hic diuisor per residuum diuisionis, & sic deinceps; alterna quadam diuisione. Si enim diuisor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri communem mensuram, ipseque diuisor vltimus erit maxima eorum mensura: si vero occurrat diuisor, qui relinquat vnitatem, carebunt communi mensura, eruntque primi inter se, vt supra cap. 9. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent communem mensuram, erit numerus ex multiplicatione vnius in alterum productus, minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari non possit: Si vero habent mensuram communem, inuenta maxima earum mensura communi, per ea, quæ cap. 9. scripsimus, diuidatur vterque per eam, ponanturque Quotientes sub ipsis numeris. Nam si Quotientem prioris numeri per posteriorem numerum multiplices, vel Quotientem posterioris numeri per

Inuentio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati.

prio-

priorem numerum, procreabis minimum numerum à duobus illis numeratum. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratum ab eo, quem hactenus inuenimus, & à tertio numero proposito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propositus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant mensuram communẽ, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propositis numeratus. Rursus inuentum hunc numerum cum quarto numero proposito conferemus, eodemque modo minimum numerum ab illis numeratum inuestigabimus. Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atque ita progrediar, donec nullus numerus supersit, cum quo inuentus vltimo loco comparari possit. Demonstratio huius regulæ colligitur ex propos. 36. & 38. lib. 7. Eucl.

SED explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores sunt 2. 3. 4. 5. Primũ itaque quia duo priores numeri 2. & 3. non habent aliã mensurã communẽ, prẹter vnitatẽ, erit numerus 6. ex eorũ multiplicatione productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniã inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habẽt maximã mensurã 2. diuidemus per eã tã 6. quàm 4. quotientesq; 3. & 2. sub ipsis statuemus, ut hic vides. Si namq; multiplicemus 6. p 2. aut 4. p 3. pcreabimus numerũ 12. q minimus est, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratũ.

6.	4.
3.	2.

Tandem, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. non habent communem mẽsuram, præter vnitatẽ, multiplicabimus 12. per 5. producemusque numerum 60. minimum à quatuor denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratum. Sit rursum inueniendus minimus numerus à 4. 6. 8. 12. 7. numeratus. Primum, quia primi duo 4. & 6. habent communem maximam mensurã 2. partiemur per eã tam 4. quàm 6. quotientesque 2. & 3. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Nam si multiplicemus 4. per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerum 12. minimum ab illis duobus 4. & 6. numeratũ. Deinde, quia numerus hic 12. inuentus, & tertius numerus datus 8. habent maximam mensurã communẽ 4. diuidemus per eam tam 12. quàm 8. & quotiẽtes 3. & 2. sub ipsis collocabimus. Si enim multiplicemus 12. per 2. vel 8. per 3. gignemus numerum 24. minimum à primis tribus datis numeris 4. 6. 8. numeratum. Rursus, quoniã hic numerus inuentus 24. & quartus propositus 12. habent communẽ maximam mensuram 12. diuidemus per eã tam 24. quàm 12. & quotientes 2. & 1. ponemus sub ipsis. Nam si multiplicemus 24. per 1. vel 12. per 2. producemus numerum 24. minimum à quatuor numeris datis 4. 6. 8. 12. numeratum. Postremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. non habent vllam mensuram communem, præter

4.	6.
2.	3.

12.	8.
3.	2.

24.	12.
2.	1.

vnita-

vnitatem; multiplicabimus illos inter se, procreabimusq; numerum 168. minimum à datis numeris 4.6.8.12.7. numeratum. Quòd si quis per priorem regulam numerum inquireret ab eisdem datis numeris 4.6.8.12.7. numeratum, multiplicando nimirum ipsos inter se, reperiret hunc numerum 16128. qui multo maior est, quàm hic numerus minimus 168. à nobis inuentus.

IAM vero, inuento numero ab omnibus denominatoribus minutiarum reducendarum numerato, siue is minimus sit, siue non, reducemus minutias datas ad eandem denominationem hoc modo. Denominator cōmunis est numerus ille inuentus: quem si per cuislibet minutiæ denominatorem diuidamus, & quotientem per numeratorem multiplicemus, producemus numeratorem, qui supra communem denominatorem scribendus est. Vt in postremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{5}$. numerus à denominatoribus numeratus est 120. Hic ergo erit denominator communis. Quē si diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum si multiplicemus per 1. numeratorem eiusdem minutię, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rursus si eundem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem secundę minutię, prodibit hic numerus 40. quem si multiplicemus per 2. numeratorem eiusdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorem pro secunda minutia. atque ita de cæteris. Itaque datę quatuor minutię reducentur ad has quatuor eiusdē denominationis $\frac{60}{120}$. $\frac{80}{120}$. $\frac{90}{120}$.

Quo pacto plures minutiæ, quàm duæ, ad eādē denominationē reducantur.

$\frac{90}{120}$. $\frac{24}{120}$. *Quòd si accipiamus numerũ 60. qui minimus est ab eisdem denominatoribus numeratus, pro denominatore, reducemus easdem minutias ad has* $\frac{30}{60}$. $\frac{40}{60}$. $\frac{45}{60}$. $\frac{12}{60}$.

Alia ratio reducendi duas minutias ad eandẽ denominationem.

EADEM ratione redigi poterunt duæ etiã minutiæ ad eandem denominationẽ, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus siue minimus, siue non minimus, à denominatoribus numeratus, erit is cõmunis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propositis duabus minutijs $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{12}$. *Minimus numerus à denominatoribus numeratus est 12. quem si partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ; quotientemque 2. per 5. numeratorem eiusdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et si rursum eundem numerũ 12. diuidamus per 12. denominatorem posterioris minutiæ, & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiusdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore posterioris minutiæ. Itaque datæ duæ minutiæ reducentur ad has* $\frac{10}{12}$. $\frac{7}{12}$. *Quòd si quis easdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias* $\frac{60}{72}$. $\frac{42}{72}$. *Ex quibus omnibus perspicuum est, quantum intersit inter minimũ numerum à denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiusdem denominationis reducuntur, quod per alias regulas non fit.*

Vtilitas minimi numeri a denominatorib. datarũ minutiarũ numerati.

CONTINGIT etiam aliquando, numeratorem

torem minutiæ ex additione, multiplicatione, diuiſioneque productæ maiorem eſſe denominatore, atque adeo minutiam illam totum ipſum, atque integrum ſuperare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et ſi quid in diuiſione ſuperfuerit, illud erit numerator, cui idem denominator ſubſcribendus eſt. Vt hæc minutia $\frac{60}{12}$*. ſi numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autem minutia* $\frac{100}{7}$*. redigetur ad* $14\frac{2}{7}$*. quia in diuiſione numeratoris per denominatorem remanſerunt 2. atque ita minutia illa continet 14. integra, & inſuper duas ſeptimas partes vnius integri.* Quo modo minutia, cuius numerator maior eſt denominatore, ad integra redigatur.

ITEM non raro vſu venit, vt integra ad fractionem aliquã reducenda ſint. quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra propoſita per denominatorem minutiæ, ad quam integra reducenda ſunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ eſt ſubſcribendus. Vt ſi 7. integra ad quintas partes ſint redigenda; Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propoſitæ minutiæ, productoque numero 35. ſupponemus eundem denominatorem, vt fiat minutia $\frac{35}{5}$*. æquiualens 7. integris. Quòd ſi integris adhæreat minutia aliqua, addendus eſt numerator illius minutiæ ad numerũ productũ ex integris per denominatorẽ minutiæ multiplicatis, vt efficiatur numerator.* Quo pacto integra ad minutiam reducantur.

Vt ſi

Vt si numerus hic 8$\frac{2}{5}$. reducẽdus sit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorẽ adhærẽtis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorẽ eiusdẽ minutiæ, vt habeamus numeratorẽ 42. huius minutiæ $\frac{42}{5}$. quæ numero proposito 8$\frac{2}{5}$. æquiualet.

Minutiæ minutiarũ quo pacto ad simplices minutias reuocentur.

POSTREMO, quando in operatione aliqua minutiæ minutiarum occurrunt, reducendæ erunt ad simplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter se, hoc est, primum in secundum, & hoc productum in tertium, atque iterum hoc productũ in quartum, & sic deinceps, si plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorem simplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarum æqualis erit. Denominator autem erit numerus productus ex multiplicatione denominatorũ inter se, si multiplicentur, vt de numeratoribus dictum est. Vt hæc minutia minutię $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. reducetur ad hanc simplicem fractionem $\frac{12}{35}$. quia multiplicatio numeratorum facit 12. denominatorum autem 35. ita vt tres quintę quatuor septimarum partium vnius integri contineant $\frac{12}{35}$. eiusdem integri. Sic etiã hęc minutia minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. reducetur ad hanc simplicem $\frac{6}{144}$. quæ ad minimos numeros reducta faciet $\frac{1}{24}$. vt ex antecedenti cap. constat. Denique hęc minutia minutiarũ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. ad hanc simplicẽ reuocabitur $\frac{18}{60}$. quę reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}$.

HOC autem ita esse, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiam minutiarum

rum $\frac{3}{4}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{1}{5}$. *esse desumptã ex vno aureo. Necesse est igitur, si regula prescripta vera est, eã continere tres Iulios, qui sunt* $\frac{3}{10}$. *vnius aurei, cũ quilibet Iulius sit* $\frac{1}{10}$. *aurei vnius. Id quod quilibet facile perspiciet. Nam* $\frac{1}{5}$. *vnius aurei continent 6. Iulios, quòd duo Iulij sint* $\frac{1}{5}$. *aurei vnius. At* $\frac{2}{3}$. *sex Iuliorum sunt 4. Iulij; & * $\frac{3}{4}$. *quatuor Iuliorum sunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum* $\frac{1}{3}.\ \frac{2}{5}.\ \frac{1}{3}$. *rectè ad hanc* $\frac{2}{45}$. *esse reuocatam, in hoc numero 45. ostendemus. Nam* $\frac{1}{3}$. *huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus si sumantur* $\frac{2}{5}$. *accipientur 6. vnitates; ex quibus denique si accipiatur* $\frac{1}{3}$. *sumentur 2. vnitates, que faciunt* $\frac{2}{45}$. *dicti numeri 45. Non secus alia exempla explicari poterunt, & probari.*

ADDITIO FRACTORVM numerorum. Cap. XI.

SI *minutię addendę habeant eundem denominatorem, addendi sunt numeratores, & aggregato idem denominator supponendus: Si verò diuersos habeant denominatores, reducendę sunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodẽ modo additio instituenda. Vt summa collecta ex hisce tribus minutijs* $\frac{2}{13}$ $\frac{4}{13}$. $\frac{6}{13}$. *est hęc* $\frac{12}{13}$. *quia habent eundem denominatorem, summaque ex numeratoribus collecta est 12. quemadmodum ex 2. aureis, 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiã ex hisce minutijs* $\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$. *colligitur hęc summa* $\frac{10}{10}$. *quę vni integro ęquiualet.* Additio minutiarum quo modo fiat.

ualet. Ita quoq; ex his minutijs $\frac{4}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. colligitur hæc summa $\frac{18}{7}$. quæ reducta ad integra facit $2\frac{4}{7}$. At vero vt hę minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam summã colligantur, reducẽdæ prius sunt ad eundẽ denominatorem, nimirũ ad has minutias $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. ex quibus in vnam summã collectis fiunt $\frac{17}{12}$. hoc est, $1\frac{5}{12}$. atque hæc est summa duarũ minutiarũ propositarũ, quemadmodũ ex 2. aureis & 3. iulijs, si 2. aurei reducantur ad 20. iulios, fiunt 23. iulij. Sic etiam minutiæ hæ $\frac{6}{7}$. $\frac{12}{13}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{4}{5}$. vt in vnam summam colligantur, reducendæ prius sunt ad has eiusdem denominationis $\frac{4290}{5005}$. $\frac{4620}{5005}$. $\frac{4550}{5005}$. $\frac{4004}{5005}$. ex quibus fit hæc sũma $\frac{17464}{5005}$. id est, $3\frac{2449}{5005}$.

Q̃ si integra adsunt, qd faciendum sit.

SI integra adsint, addenda sunt ea seorsum, & minutiæ etiã seorsum. Vt ex 8. & $\frac{3}{5}$. fiũt $8\frac{3}{5}$. Item ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Item ex $8\frac{2}{7}$. & $4\frac{6}{7}$. fiunt $12\frac{8}{7}$. hoc est, $13\frac{1}{7}$. Item ex $8\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{17}{12}$. id est, $13\frac{5}{12}$.

Praxis addẽdi minutias diuersarũ denominationũ inter se.

ITAQVE vt duæ minutię diuersarum denominationũ in vnam colligantur summã, multiplicandæ eæ sunt in crucẽ, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter se multiplicandi, vt eiusdẽ minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ illæ minutię ad eandẽ denominationẽ, vt ex præcedenti cap. patet, adduntur que numeratores inter se. Vt si hæ duæ minutię $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. sint addendæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorem posterioris, quàm 3. numeratorẽ posterioris per 3. deno-

nomi-

nominatorẽ prioris, productosque numeros 8. & 9. in vnam summã colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerũ ex multiplicatione denominatorũ inter se, nempe 12. faciemus denominatorem. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod si sint plures minutiæ addendæ, quàm duæ, addemus primũ priores duas, vt diximus. Deinde minutiã collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cũ quarta, & ita deinceps. Vt si addendæ sint hæ minutię $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{7}$. colligemus primũ ex prioribus duabus hãc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodẽ modo $\frac{133}{60}$. Denique ex hac, & quarta procreabimus $\frac{1231}{420}$. hoc est $2\frac{391}{420}$. summã omnium.

PROBATIO autẽ additionis fit per subtractionẽ. Subtracta enim altera minutiarũ addendarũ ex summa collecta, remanebit altera, si in additione erratum non est. Quod si plures sint addendæ minutiæ, subtracta vna earũ ex summa, relinquetur minutia alijs simul sumptis æqualis. Vt quoniam hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id est, $1\frac{4}{48}$. si ex hac summa subtrahatur prior minutia, nempe $\frac{3}{4}$. vt in sequenti cap. docebimus, remanebit hæc minutia $\frac{80}{192}$. quæ ęqualis est alteri minutię $\frac{5}{12}$. vt patet, si ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucem multiplicentur. Producetur enim idẽ numerus tam ex 80. in 12. quàm ex 5. in 192. nempe numerus 960. Quare, vt supra cap. 7. diximus, æquales sunt minutiæ $\frac{80}{192}$. $\frac{5}{12}$. Probatio additionis minutiarũ

SVB-

SVBTRACTIO FRACTORVM numerorum. Cap. XII.

SI duæ minutiæ, quarũ minor ex maiore subducenda est, habeant eundẽ denominatorẽ, subtrahendus est numerator minutiæ subtrahendæ ex numeratore alterius, & residuo idẽ denominator subscribendus. Si vero diuersos habeant denominatores, reducendæ sunt prius ad eundem denominatorẽ, & tunc eodem modo instituenda subtractio. Vt si subtrahenda sit hæc minutia $\frac{5}{17}$. ex ista $\frac{8}{17}$. subtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8. & residuo 3. eundẽ denominatorem 17. supponemus, vt fiat minutia rrsidua $\frac{3}{17}$. quemadmodũ si 5. aurei ex 8. aureis tollantur, remanent 3. aurei. At vero si deducenda sit hæc minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{8}{9}$. reducẽdæ erunt prius ambæ ad has $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. eiusdẽ denominationis; Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, residuoque 6. cõmunis denominator 27. supponendus, vt fiat minutia residua $\frac{6}{27}$. quẽadmodũ, si 2. Iulij auferendi sint ex 8. aureis, reducendi sunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquantur 78. Iulij.

Qñ integra adsunt, qd faciendum sit,

SI ab integris detrahenda est aliqua fractio, reducenda est vna vnitas integrorũ ad fractionẽ eiusdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator æqualis sit denominatori, à qua deducenda est minutia proposita. Vt si ex 10. auferenda sit minutia $\frac{6}{11}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{11}{11}$. ex quibus si auferamus $\frac{6}{11}$: remanebunt $9\frac{5}{11}$.

$9\frac{5}{11}$. *Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiam reducta eſt.*

S I vero ab integris detrahenda ſint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoque eſt vna vnitas illorum integrorũ ad minutiam eiuſdẽ denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt ſi hic numerus $4\frac{3}{5}$. *ſubducendus ſit ex* 10. *faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiã hanc* $\frac{5}{5}$. *à qua ſi demantur* $\frac{3}{5}$. *relinquentur* $\frac{2}{5}$. *& ſi* 4. *auferantur ex reliquis* 9. *ſupererunt* 5. *Itaque totus numerus reſiduus erit* $5\frac{2}{5}$.

D E N I Q V E ſi ab integris vna cum fractis detrahenda ſint integra cum fractis, vel fractiones ſolæ; ſi quidem fractio detrahenda minor eſt, quàm illa, à qua fit ſubtractio, vel illi ęqualis, detrahenda eſt fractio à fractione, & integra ab integris: ſi vero fractio ſubtrahenda maior eſt, q̃ illa, à qua fit ſubtractio, reducenda eſt vna vnitas integrorũ, à quibus ſubtractio fieri debet, ad fractionem, quæ illis adhæret, &c. Vt ſi hic numerus $6\frac{3}{4}$. *ſubducendus ſit ex hoc* $10\frac{1}{2}$. *quoniam minutia* $\frac{3}{4}$. *maior eſt, quàm* $\frac{1}{2}$. *faciemus ex vna vnitate horum integrorum* 10. *hanc minutiã* $\frac{2}{2}$. *quæ cum* $\frac{1}{2}$. *faciet* $\frac{3}{2}$. *à qua ſi auferatur minutia* $\frac{3}{4}$. *relinquetur minutia* $\frac{6}{8}$. *Ablatis quoque* 6. *ex* 9. *ſuperſunt* 3. *Totus ergo numerus reſiduus eſt* $3\frac{6}{8}$.

Q V O D ſi quando vna minutia à pluribus fuerit ſubtrahenda, vel plures ab vna, vel plures à pluribus, danda erit opera, vt prius plures illæ — Qñ plures ſunt minutiæ, quid agendum.

illæ tam ſubtrahendæ, quàm illæ, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam ſummam colligantur.

Praxis ſubtrahēdi minutiā a minutia.

ITAQVE vt fiat ſubtractio vnius minutiæ ab alia, cū denominatores ſunt diuerſi, multiplicandi ſunt numeratores in crucē per denominatores, & vnū productū ab altero ſubducendū, reſiduoque ſupponendus numerus ex multiplicatione denominatorū inter ſe productus: quia hac ratione duæ minutiæ propoſitę reducuntur ad eandē denominationē, &c. Vt ſi minutia $\frac{3}{4}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. ſubtrahenda ſit, multiplicabimus 3. numeratorē minutiæ ſubtrahendę per 9. denominatorem alterius, & productū 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit ſubtractio, per 4. denominatorē alterius, & reliquæ vnitati ſuppponemus numerū 36. productū ex multiplicatione denominatorū inter ſe, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Probatio ſubtractionis minutiarum.

PROBATIO autē ſubtractionis fit per additionē. Si namque minutia relicta ad ſubtractam minutiā adijciatur, cōponetur minutia illa. à qua ſubtractio facta eſt, ſi non eſt erratum. Vt quoniā ſubtracta minutia hac $\frac{3}{4}$. ex iſta $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; ſi addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{3}{4}$. cōponetur hæc minutia $\frac{112}{144}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hęc $\frac{7}{9}$. à qua nimirū facta eſt ſubtractio. Sic etiam, quia ſubtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex iſta $\frac{6}{8}$. reliqua eſt minutia hæc $\frac{2}{24}$. ſi ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{54}{72}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{6}{8}$. à qua ſubtractio facta eſt: vt patet, ſi vtraque

ad mi-

ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hæc $\frac{3}{4}$. *Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum* 432.

MVLTIPLICATIO FRACTORUM numerorum. Cap. XIII.

SI numeratores inter se multiplicentur, producetur numerator summę multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiusdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. *per* $\frac{3}{4}$. *fient* $\frac{6}{12}$. *hoc est,* $\frac{1}{2}$. *Numeratores enim inter se multiplicati faciunt* 6. *denominatores vero* 12.

Multiplicatio minutiarũ quo pacto fiat.

QVANDO minutia per numerum integrũ multiplicãda est, supponenda est numero integro vnitas, vt fiat ex ipso quasi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quã proxime pręscripsimus, seruanda. Vt si multiplicanda sint 8. *per* $\frac{4}{5}$. *scribemus* 1. *sub* 8. *vt in apposito exemplo vides. Igitur si multiplicentur inter se tam numeratores, quàm denominatores, producetur hæc minutia* $\frac{32}{5}$. *quæ æquiualet huic numero* $6\frac{2}{5}$.

$\frac{8}{1}$. $\frac{4}{5}$.

Q̃n adsunt integra, qd agendum.

QVANDO autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illam minutiam, vt fiat vna fractio ex ipso, & minutia adiũcta. Vt si multiplicãda sint 8. *per* $3\frac{5}{6}$.

faciemus ex $3\frac{5}{6}$. *minutiā* $\frac{23}{6}$. *& numero* 8. *supponemus* 1. *vt hic* $\frac{8}{1}$. $\frac{23}{6}$. *factum esse vides. Si igitur tā numeratores inter se, quàm denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia* $\frac{184}{6}$ *huic numero* $30\frac{4}{6}$. *æquiualens. Item si multiplicanda sint* $4\frac{2}{3}$. *per* $\frac{1}{2}$. *reducemus* $4\frac{2}{3}$. *ad* $\frac{14}{3}$. *vt hic vides.* $\frac{14}{3}$. $\frac{1}{2}$. *Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc* $\frac{14}{6}$. *id est,* $2\frac{2}{6}$. *Eodē pacto si multiplicanda sint* $4\frac{1}{2}$. *per* $3\frac{1}{5}$. *reducemus priorem numerum ad* $\frac{9}{2}$. *posteriorē vero ad* $\frac{16}{5}$. *vt in apposito exmplo vides.* $\frac{9}{2}$ $\frac{16}{5}$. *Multiplicatis autem tam numeratoribus inter se, quàm denominatoribus, producetur hęc minutia* $\frac{144}{10}$. *hoc est,* $14\frac{4}{10}$.

Probatio multiplicationis minutiarum.

EXAMINATVR autē multiplicatio per diuisionē. Si enim minutia producta diuidatur per alterā minutiarū multiplicantium, prodibit necessario in quotiente altera minutia multiplicans. Vt si ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. *per* $\frac{4}{7}$. *fiunt* $\frac{4}{14}$. *necesse est, vt diuisis* $\frac{4}{14}$. *per* $\frac{1}{2}$ *producantur* $\frac{4}{7}$. *diuisis autē eisdē* $\frac{4}{14}$. *per* $\frac{4}{7}$. *gignatur* $\frac{1}{2}$. *Perspicuum autem erit ex sequenti cap. diuisis* $\frac{4}{14}$. *per* $\frac{1}{2}$. *produci* $\frac{8}{14}$. *quæ minutia huic* $\frac{4}{7}$. *æquiualet; diuisis autem eisdem* $\frac{4}{14}$. *per* $\frac{4}{7}$. *produci* $\frac{28}{56}$. *hoc est,* $\frac{1}{2}$.

Cur in multiplicatione minutiarū producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante.

NEMINI autē mirū videri debet, multiplicationē minutiarum producere semper minutiā minorē vtraque minutia multiplicante, vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet,

tet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producta est minutia $\frac{4}{14}$. id est, $\frac{2}{7}$. quæ minor est vtraque minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte cõsideretur, facile quiuis perspiciet, hoc necessario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per aliũ multiplicari, seu duci dicatur, cum alter ipsorũ toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perspicuũ est, neutrã minutiarũ multiplicantium posse totam sumi in producto, sed fragmenta duntaxat ipsius, qualia nimirũ fragmenta vnitatis, altera minutia multiplicans refert, qnandoquidẽ hæc minutia minor est vnitate. Hinc enim fit, vt quẽadmodum minutia multiplicans non continet ingrã vnitatẽ; ita quoque numerus productus non contineat totam alterã minutiã multiplicantem, vt in proximo exemplo, quemadmodũ $\frac{1}{2}$. est dimidiata pars vnitatis, ita etiã numerus productus $\frac{4}{14}$. id est, $\frac{2}{7}$. est pars dimidiata huius minutiæ $\frac{4}{7}$. vt definitio multiplicationis postulat. Recte ergo ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producitur minutia hæc $\frac{4}{14}$. hoc est, $\frac{2}{7}$. Sic etiã ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. producitur minutia hæc $\frac{9}{3}$. id est, numerus hic 3. Nam quemadmodũ $\frac{1}{3}$. est tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia pars est numeri 9. Vel quemadmodum numerus productus 3, continet $\frac{1}{3}$. nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non est igitur mirum, quòd minor numerus producatur vtraque minutia multiplicante. Si tamen integra per integra cum fractione, vel integra cũ fractione per inte-

grà cum fractione multiplicentur, ſemper producetur maior numerus vtroque numero multiplicante, propter numerum integrum multiplicantẽ integra. Vt ex multiplicatione 4. per $3\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{52}{4}$. hoc eſt, 13. quia numerus 4. ter ſumptus facit 12. & quarta eius pars eſt 1. Vel quia numerus 3. ſumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$. ſumpta quater facit $\frac{4}{4}$. id eſt, 1.

DIVISIO FRACTORVM NVmerorum. Cap. XIIII.

Diuiſio minutiarum quo modo fiat.

FACILITATIS gratia Diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Cõmutentur termini diuiſoris, id eſt, numerator ſcribatur infra lineolam, & denominator ſupra eandem. Quo facto, ſi regula multiplicationis cap. præcedenti tradita ſeruetur, id eſt, ſi tã numeratores, quàm denominatores inter ſe multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt ſi diuidenda ſit minutia $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{6}$. ſtabit exemplum, vt hic vides. $\frac{1}{2}$. $\frac{6}{1}$. *Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quàm denominatoribus inter ſe, producetur minutia hæc $\frac{6}{2}$. hoc eſt, numerus 3. pro Quotiente. Sic etiam ſi diuidenda ſit minutia $\frac{2}{5}$. per $\frac{3}{7}$. ſtabit exemplum, vt hic apparet.* $\frac{2}{5}$. $\frac{7}{3}$. *Quotiens autẽ erit $\frac{14}{15}$.*

Qñ adſunt integra, qd agendum.

QVANDO numerus integer per minutiã, vel per numerũ integrum cum fractione diuidendus eſt: Vel minutia per numerum integrum, vel

per

per numerũ integrũ cum fractione; vel deniq; numerus integer cũ fractione per minutiam, aut per numerum integrum, aut per numerũ integrum cũ fractione, supponenda est vnitas numero integro, si ei non adhæreat minutia, si vero minutia ei adiũcta sit, reducẽdus est numerus integer ad minutiã adiunctam, vt fiat vna minutia, quemadmodũ cap. precedente diximus. Deinde regula iã prescripta seruanda. Vt in sequentibus diuisionibus stabunt exẽpla, vnà cum Quotiẽtibus, vt hic vides.

				Quotientes.
6. per $\frac{2}{3}$.	*ita stabunt exempla.*	$\frac{6}{1}$.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{18}{2}$. vel 9.
6. per $4\frac{2}{3}$.		$\frac{6}{1}$.	$\frac{3}{14}$.	$\frac{18}{14}$. vel $1\frac{2}{7}$.
$\frac{2}{3}$. per 6.		$\frac{2}{3}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. vel $\frac{1}{9}$.
$\frac{2}{3}$. per $6\frac{1}{2}$.		$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{13}$.	$\frac{4}{39}$.
$6\frac{1}{2}$. per $\frac{3}{4}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$. vel $8\frac{2}{3}$.
$6\frac{1}{2}$. per $3\frac{2}{5}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{5}{17}$.	$\frac{65}{34}$. vel $1\frac{31}{34}$.
$6\frac{1}{2}$. per $3\frac{4}{5}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{5}{19}$.	$\frac{65}{38}$. vel $1\frac{27}{38}$.

ALII tradunt hãc regulã diuisionis minutiarũ. Numerator minutiæ diuidẽde (posita vnitate sub integris, si adsint, et reductis integris ad minutiã adherentẽ, si qua adhæreat) multiplicetur per denominatorẽ minutiæ diuidẽtis; procreabitur enim hac ratione numerator Quotientis minutie.

Qua rõne alij diuisionẽ minutiarũ doceãt.

Denominator autē producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem est, ac si termini diuisoris commutentur, & regula multiplicationis seruetur, vt perspicuū est. Quoniam vero ambigere quispiā posset aliquando, an numerator minutiæ diuidendæ, an vero diuidentis producat numeratorē minutiæ Quotientis; (facile enim hęc res ex animo excidere potest;) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuisionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur.

Probatio diuisionis minutiarum.

EXAMEN autem diuisionis fit per multiplicationem. Nam si Quotiens minutia multiplicetur per minutiam diuidentem, producetur minutia diuisa necessariò. Vt quia ex diuisione $\frac{4}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{8}{5}$. hoc est, $1\frac{3}{5}$. fit, vt ex multiplicatione $1\frac{3}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producatur minutia diuisa $\frac{4}{5}$. Producitur autem ex hac multiplicatione minutia $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{4}{5}$. æqualis est, vt patet.

Cur aliqñ ī diuisione minutiarū Quotiens maior fit minutia diuisa.

QVOD autem in diuisione minutiarum plerunque producatur Quotiens maior minutia diuisa, vt in diuisione $\frac{6}{7}$. per $\frac{2}{7}$. patet, in qua Quotiens est $\frac{4}{1}\frac{2}{4}$. hoc est, 3. mirari nemo debet. Nam cum numerus Quotiens indicet, quoties diuisor in diuidendo numero contineatur, manifestū est, quando minutia diuidens minor est minutia diuidenda, illam in hac sępius quàm semel contineri; atque adeo Quotientem maiorem esse quàm 1. etiamsi minutia diuidēda minor sit, quàm 1. Veluti

in pro-

in proximo exemplo, quoniam minutia diuidens $\frac{2}{7}$. in minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. continetur ter, fit, vt Quotiens sit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiam ex definitione Diuisionis perspicue apparet. Cum enim diuisio sit inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet, vt cap. 5. diximus: perspicuum est, in proxima diuisione Quotientem debere esse 3. qui vnitatem ter contineat, quoties nimirum minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. minutiam diuidentẽ $\frac{2}{7}$. continet. Mirum ergo non est, in diuisione minutiarum semper produci Quotientẽ maiorem numero diuidendo, cũ diuisor minor est, quàm 1. & quàm minutia diuidenda, vt in dato exemplo patuit, idemque in diuisione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi Quotiens est 12. Nam minutia diuidens $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur. Qñ Quotiés maior fit numero diuidendo ĩ minutijs.

QVANDO tamen diuisor maior est, quàm 1. vel minor quàm minutia diuidenda, Quotiens semper minor erit numero diuidendo, propterea quòd tunc diuisor (cum maior existat, quàm vnitas.) non toties possit contineri in numero diuidendo, quoties vnitas continetur. Vt diuisis $\frac{3}{4}$. per $\frac{8}{9}$. Quotiens est $\frac{27}{32}$. Item diuisis $6\frac{1}{2}$. per $1\frac{2}{3}$. Quotiẽs est $\frac{39}{10}$. id est, $3\frac{9}{10}$. Diuisis rursus $100\frac{1}{2}$. p $10\frac{3}{4}$. Quotiẽs est $\frac{804}{86}$. hoc est $9\frac{30}{86}$. siue $9\frac{15}{43}$. Sic etiam si diuidantur $3\frac{1}{5}$. per $1\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{32}{15}$. hoc est, $2\frac{2}{15}$. vbi vides, Quotientem semper minorem esse numero diuiso. Qñ Quotiens in minutijs minor fit diuidẽdo numero.

INSITIO FRACTORVM numerorum. Cap. XV.

Insitio minutiarum, quid.

SOLENT *Arithmetici nonnulli vti operatione quadam minutiarum, quam insitionem vocāt. Est autem insitio minutiarum nihil aliud, quàm propositis duabus, aut pluribus minutijs; quarum qualibet sit fractio vel vnius duntaxat particulæ omniū sequentium, vel fractio integrarum omnium fractionum sequentium, additio huiusmodi fractionum ad vltimā minutiā, respectu cuius omnes illæ fractiones fractionum sumuntur: ita vt quodammodo præcedentes fractiones sequētibus inserantur. Vnde nomen insitionis obtinuit operatio hæc minutiarum: quemadmodū in exemplis patebit. Vt propositis hisce duabus minutijs* $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. *ita vt prior sit fractio vel vnius tantum particulæ posterioris, vel fractio totius posterioris, hoc est, ita vt prior contineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas tertias trium quartarum: operatio, qua* $\frac{2}{3}$. *vnius quartæ, vel* $\frac{2}{3}$. *trium quartarum, ad* $\frac{3}{4}$. *adduntur, appellatur insitio. Eodem modo propositis quatuor hisce minutijs* $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. *ita vt qualibet sit fractio vel vnius particulæ omniū sequentiū, vel fractio totarum omnium sequentium, hoc est, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius septimæ, & secunda significet tres quartas vnius quintæ vnius septimæ, & tertia comprehēdat duas quintas vnius septimę; vel prima contineat duas tertias trium quartarū*

dua-

duarum quintarum quatuor septimarũ, & secunda comprehendat tres quartas duarum quintarũ quatuor septimarum; & tertia significet duas quintas quatuor septimarum: operatio, qua omnes hæ fractiones fractionum, nimirum $\frac{2}{3}$. *vnius quartę vnius quintæ vnius septimæ, &* $\frac{3}{4}$. *vnius quintæ vnius septimæ, &* $\frac{2}{5}$. *vnius septimæ; vel* $\frac{2}{3}$. *trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, &* $\frac{3}{4}$. *duarum quintarum quatuor septimarum, &* $\frac{2}{5}$. *quatuor septimarum, ad* $\frac{4}{7}$. *adduntur, insitio dicitur. & sic de alijs.*

EST *ergo insitio duplex: vna, quando qualibet minutia est fractio vnius duntaxat particulæ omnium sequentiũ minutiarum; altera, quando qualibet minutia est fractio integrarum omnium minutiarum sequentium, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima solũ insitione locuti sunt, nulla prorsus facta mentione insitionis secundæ, eam fortassis ob causam, quòd prima vtilis sit ad diuidendum quemcunque numerũ integrũ, vnà cum fractione aliqua per numerũ integrũ, vt paulo post dicemus. Quoniã vero secunda insitio egregium quoque vsum habet in progressionibus Geometricis, vt, Deo iuuãte, in maiore nostro Arithmetices opere declarabimus; vtriusque insitionis regulam trademus.* Insitio duplex est. Insitio 2a quid excogitata sit.

MAGNVM *autẽ discrimẽ est inter insitionem, & operationẽ illã, qua cap. 9. minutias minutiarum ad simplicem minutiam reducere docuimus. Ibi enim propositis v. g. duabus hisce minutijs,* $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. *ita vt prior sit fractio posterioris, solũ* Differentia inter insitionẽ, & reductionem minutiarũ minutiarũ

inqui-

inquirebamus, quamnam minutiam simplicem constituerent duæ tertiæ trium quartarũ, inueniebamusq́, constituere $\frac{6}{12}$. *id est,* $\frac{1}{2}$. *vnius integri; hic vero indagabimus, quanã minutia efficiatur, si addantur* $\frac{2}{3}$. *vnius quartæ, vel* $\frac{2}{3}$. *triũ quartarum ad* $\frac{3}{4}$. *efficieturque priori modo minutia hæc,* $\frac{1}{12}$. *posteriori vero hæc,* $\frac{15}{12}$. *hoc est.* $1\frac{1}{4}$. *quarum vtraque longe abest à* $\frac{1}{2}$. *Eodem modo discrimen apparebit, si fuerint plures minutiæ, quàm duæ.*

Prima regula insitionis duarũ minutiarũ

ITAQVE si proponantur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, ita fiet insitio. Posterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris multiplicetur, productoq́; numero numerator eiusdẽ prioris adijciatur. Hoc enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatione denominatorũ inter se. vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. *ita fiet insitio, siue additio* $\frac{2}{3}$. *vnius quartæ ad* $\frac{3}{4}$. *Ex* 3. *numeratore posterioris minutiæ in* 3. *denominatorem prioris fiunt* 9. *Addito numeratore* 2. *eiusdem prioris minutiæ, fiunt* 11. *pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus* 12. *ex multiplicatione denominatorum inter se productus: ita vt hæc minutia* $\frac{11}{12}$. *componatur ex additione* $\frac{2}{3}$. *vnius quartæ ad* $\frac{3}{4}$. *Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim* $\frac{2}{3}$. *vnius quartæ, secundum reductionẽ minutiarum minutiarum, faciunt* $\frac{2}{12}$. *si addantur* $\frac{3}{12}$. *ad* $\frac{3}{4}$. *fient* $\frac{44}{48}$. *hoc est,* $\frac{11}{12}$. *vt prius.*

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur; ita vt quælibet sit fractio vnius tantum particulæ omnium sequentium, insitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoq; numero addatur numerator eiusdem penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorē minutię antepenultimæ, productoq; numero addatur eiusdem numerator; Post hæc aggregatū hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedētis minutię, productoq; numero eiusdem numerator adijciatur; & sic deinceps; si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicētur per denominatorē præcedentis minutiæ, eiusdemq; numerator producto adijciatur, donec nulla minutia supersit. Postremū enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ. Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter se, vt datis hisce minutiis $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, hoc est, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$, vnius septimæ ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutię in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numeratore 2. eiusdem penultimæ minutię, fiunt 22: quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ faciunt 88: Addito numeratore 3: eiusdē minutiæ antepenultimæ, fiunt 91. quæ multiplicata per 3: denominatorem antecedentis minutię & primę, faciunt 273: Addito numeratore 2, eiusdem primæ minutię, quę proximè antecedit,

Quō modo plures minutiæ, q̄ duæ, inserātur per primam regulam.

cedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter se, si nimirum primus per secundum multiplicetur, & hic numerus productus per tertiũ, &c. Itaq; ex hac insitione orietur minutia hęc $\frac{275}{420}$. *quæ ad minimos terminos reducta faciet* $\frac{55}{84}$. *Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniam* $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. *per regulam reductionis minutiarum minutiarum faciunt* $\frac{2}{420}$. *&* $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. *faciunt* $\frac{3}{140}$. *&* $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. *faciunt* $\frac{2}{35}$. *si tres istæ minutiæ* $\frac{2}{420}$. $\frac{3}{140}$. $\frac{2}{35}$. *addantur ad* $\frac{4}{7}$. *fient* $\frac{9432500}{14406000}$. *hoc est, in minimis terminis* $\frac{55}{84}$. *vt prius. sed multo facilius, & citius hæc summa inuenta est per insitionem.*

Minutiæ inferendæ iuxta primã regulã nõ sunt reducẽdæ ad minimos terminos ante finem o͞pationis.

CÆTERVM in hac regula insitionis nulla minutia reducẽda est ad minimos terminos, antequam tota operatio absoluatur, quia sensus variaretur, & magnus fieret error: absoluta tamen operatione, reduci potest summa producta ad minimos terminos, vt à nobis factum est. Reduximus enim minutiã hanc $\frac{275}{420}$. *ex insitione productam ad istam* $\frac{55}{84}$. *Quod autem sensus variaretur, & error contingeret, si minutia aliqua ante finem operationis ad terminos minimos reuocaretur, perspicuum est. Nam si inserendę sint hæ minutiæ* $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. *id est, addendæ* $\frac{2}{3}$. *vnius duodecimæ ad* $\frac{8}{12}$. *fient* $\frac{26}{36}$. *At si posterior minutia* $\frac{8}{12}$. *reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hanc minutiã* $\frac{2}{3}$. *deberẽt inseri* $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. *id est,*

$\frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3}$.vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui sensus longe alius est, q̃ prior. Fietq; propterea ex hac insitione alia minutia nimirũ $\frac{8}{9}$. valde diuersa à priori minutia producta $\frac{8}{9}$. Prior tamen minutia producta $\frac{2}{3}\frac{6}{6}$. reduci potest ad hanc in minimis terminis $\frac{1}{1}\frac{3}{8}$.

PRAETEREVNDVM etiã nõ est, summã ex insitione hactenus exposita collectã, si vltima minutia minor est, quàm vnitas, semper minorẽ esse vnitate, etiãsi infinitæ minutię inserantur. Vt si hæ minutiæ $\frac{3}{4}$.$\frac{2}{3}$.$\frac{1}{2}$.$\frac{4}{5}$. inserantur, fiet minutia $\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{9}{0}$. q̃ minor est, q̃ vnitas. Quod ita debere esse, hac ratione declarari poterit. Quoniam vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatẽ, deest $\frac{1}{5}$. & precedẽs minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non est $\frac{1}{5}$. sed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit vt ad complendam vnitatẽ desit adhuc $\frac{1}{2}$.vnius quintę: at quia antecedẽs minutia $\frac{2}{3}$. q̃ additur, non est $\frac{1}{2}$.vnius quintæ, sed $\frac{2}{3}$.vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad explendã unitatem desit adhuc $\frac{1}{3}$.vnius dimidij vnius quintæ. Rursus quoniam præcedens minutia $\frac{3}{4}$.nõ est $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, sed $\frac{3}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad cõficiendam vnitatẽ desit adhuc $\frac{1}{4}$.vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, semper aliquid deerit ad vnitatẽ cõplendã.

Sũma insitionis secũdũ primã regulã semper minor est, q̃ vnitas, & quære.

VT autem videas, quàm præclarũ vsum habeat prima hæc regula insitionis in diuidendo numero integro vnà cũ minutia per numerũ integrũ adducã vnũ, vel alterũ exemplum. Sint diuidẽda $20\frac{1}{4}$.p 12. Diuisis integris 20.p 12.fit Quotiens $1\frac{8}{1\,2}$. Et q̃a minutia $\frac{1}{4}$.diuidi etiã debet p 12.et quo-

Vsus primæ regulæ insitionis in diuidẽdo numero integro vnà cũ minutia p numerum integrum.

Quotiens addi priori quotienti; est autẽ Quotiens (si diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12.) $\frac{1}{4}$, vnus duodecimę, quemadmodum si 1, diuidatur per 12, Quotiens est $\frac{1}{12}$. fit, vt si inserantur hę minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id est, si addatur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimę, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12.) ad $\frac{8}{12}$. componatur minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{33}{48}$. hoc est, $\frac{11}{16}$. Igitur totus Quotiens erit $1\frac{11}{16}$. Idem efficies, si diuisorem 12. numero integro diuidendo 20. supponas, vt fiat minutia $\frac{20}{12}$. & huic minutię inseras minutiam $\frac{1}{4}$. diuidendã hoc modo. $\frac{1}{4}$. $\frac{20}{12}$. quia minutia $\frac{20}{12}$. est Quotiens diuisionis 20. per 12. cui per insitionem additur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimę, nempe Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$, per 12. Vtroque autem modo recte fieri diuisionẽ, facile experieris per regulam diuisionis. Si enim diuidas $20\frac{1}{4}$. per 12. reperies quotientem $\frac{81}{48}$, id est, $1\frac{33}{48}$. siue $1\frac{11}{16}$. vt prius.

SINT rursus diuidenda $100\frac{5}{6}$. per 8. Diuisis integris 100, per 8. fit Quotiẽs $12\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 8. & Quotiens addi priori Quotienti; est autem (si diuidantur $\frac{5}{6}$, per 8.) Quotiens $\frac{5}{6}$, vnius octauę, quemadmodũ si 1. diuidatur per 8. Quotiens est $\frac{1}{8}$. fit, vt si inserãtur hæ minutię $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius octauę, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 8.) ad $\frac{4}{8}$. conficiatur minutia, quę addita Quotienti integro 12. componat totũ Quotientẽ: Fit autem ex insitione harum minutiarũ $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$.

minu-

minutia $\frac{29}{48}$. *Totus igitur Quotiẽs erit* $12\frac{29}{48}$. *Idem efficies, si diuisorem* 8. *numero integro diuidendo* 100. *supponas, vt fiat minutia* $\frac{100}{8}$. & *huic minutię inseras minutiam* $\frac{5}{6}$. *diuidendam, hoc modo.* $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{8}$. *quia minutia* $\frac{100}{8}$. *est Quotiens diuisionis* 100. *per* 8. *cui per insitionem adduntur* $\frac{5}{6}$. *vnius octauę, nempe Quotiens diuisionis* $\frac{5}{6}$. *per* 8. *Eundem prorsus Quotientem* $12\frac{29}{48}$. *inuenies, si diuidas per regulam diuisionis,* $100\frac{5}{6}$. *per* 8. *Facies enim quotientem* $\frac{605}{48}$. *hoc est,* $12\frac{29}{48}$. *Postremo sint diuidenda* $100\frac{5}{6}$. *per* 10. *Diuisis integris* 100. *per* 10. *fit Quotiens* 10. *nihilq́; remanet. Et quia minutia* $\frac{5}{6}$. *diuidi etiam debet per* 10. & *Quotiens addi priori Quotienti; est autem (diuisis* $\frac{5}{6}$. *per* 10.) *Quotiens* $\frac{5}{6}$. *vnius decimę, quemadmodum si* 1. *diuidatur per* 10. *Quotiens est* $\frac{1}{10}$. *fit, vt si inserantur hę minutię* $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. *id est, si addantur* $\frac{5}{6}$. *vnius decimę, (nimirum Quotiens diuisionis* $\frac{5}{6}$. *per* 10.) *ad* $\frac{0}{10}$. *(quia enim nulla fractio superfuit in diuisione* 100. *per* 10. *ponenda est figura* 0. *supra diuisorem* 10. *vt fiat minutia* $\frac{0}{10}$. *cõtinens nullam decimam.) confletur minutia, quę addita Quotienti integro* 10. *componat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarũ* $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. *minutia* $\frac{5}{60}$. *Totus ergo Quotiens erit* $10\frac{5}{60}$. *hoc est,* $10\frac{1}{12}$. *Idem efficies, si diuisorem* 10. *numero integro diuidendo* 100. *supponas, vt fiat minutia* $\frac{100}{10}$. & *huic minutię inseras minutiam* $\frac{5}{6}$. *diuidendam, hoc modo.* $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{10}$. *quia minutia* $\frac{100}{10}$. *est Quotiens di-*

uisionis

uisionis 100. per 10. cui per insitionem adduntur $\frac{5}{6}$. vnius decimę, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 100. Eundem omnino Quotientem habebis, si 100 $\frac{5}{6}$. diuidas per 10. secundum diuisionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{6}{\ }\frac{0}{6}\frac{5}{0}$. hoc est, $10\frac{\ }{6}\frac{5}{0}$. siue $10\frac{1}{1}\frac{\ }{2}$.

Secūda regula insitionis duarum minutiarum.

IAM vero si proponātur duę minutiæ, quarum prior sit fractio totius posterioris, fiet insitio hac ratione. Multiplicetur posterioris minutię numerator per denominatorem prioris, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutię producendę. Denominator vero procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. datis, ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorū producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaque ex additione $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{1}{1}\frac{5}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. trium quartarum faciunt $\frac{6}{1}\frac{\ }{2}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; si addantur, $\frac{6}{1}\frac{\ }{2}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{4}\frac{0}{8}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. vt prius.

SI uero plures minutię, quàm duæ, sint propositę, ita ut qualibet sit fractio integrarum mi-

nutia-

nutiarum omnium sequentium, facienda erit insitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorum postremorum productus; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoque numero addatur numerus ex tribus postremis numeratoribus inter se multiplicatis productus: Rursus aggregatũ hoc multiplicetur per denominatorẽ proxime antecedẽtis minutiæ, productoque numero adijciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter se multiplicatis productus; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoque numero adijciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarum minutiarum, quæ vsque ad eum locum assumptæ fuerunt, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt propositis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. *ita fiet insitio, siue additio* $\frac{2}{3}$. *trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarũ, &* $\frac{3}{4}$. *duarũ quintarũ quatuor septimarũ, &* $\frac{2}{5}$. *quatuor septimarũ, ad* $\frac{4}{7}$. *Ex 4. numeratore ultimę minutię in 5. denominatorẽ penultimę fiũt 20. Addito numero 8. producto ex postremis duob. numeratorib. 4. et 2. inter se multiplicatis, fiũt 28. q̃ multiplicata p̃ 4. denominatorẽ antepe-*

Quo pacto plures minutiæ, q̃ duæ, inseriãtur p̃ secũdã regulã.

nultimæ minutiæ, faciunt 112. *Addito numero* 24. *producto ex postremis tribus numeratoribus* 4.2. & 3. *inter se multiplicatis, fiunt* 136. *quæ multiplicata per* 3. *denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima est, faciunt* 408. *Addito numero* 48. *producto ex omnibus quatuor numeratoribus* 4.2.3. & 2. *inter se multiplicatis, fiunt* 456. *pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus* 420. *productus ex denominatoribus omnibus inter se multiplicatis. Itaq; ex insitione hac generabitur hęc minutia,* $\frac{456}{420}$. *hoc est,* $1\frac{36}{420}$. *siue in minimis terminis* $1\frac{3}{35}$. *Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam* $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. *per regulã qua minutiæ minutiarũ reducuntur, faciunt* $\frac{48}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. *faciunt* $\frac{24}{140}$ & $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. *faciunt* $\frac{8}{35}$. *si tres hæ minutiæ* $\frac{48}{420}$. $\frac{24}{140}$. $\frac{8}{35}$. *addantur ad* $\frac{4}{7}$. *fiet minutia* $\frac{15640800}{14406000}$. *hoc est,* $1\frac{1234800}{14406000}$ *siue* $1\frac{3}{35}$. *in minimis terminis, vt prius. Sed multo facilius, & expeditius eandem summam per insitionem collegimus.*

IN hac porro secunda regula insitionis possunt minutiæ inserendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam si inserantur hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. *id est, si addantur* $\frac{2}{3}$. *quatuor octauarum ad* $\frac{4}{8}$. *fient* $\frac{20}{24}$. *hoc est,* $\frac{5}{6}$. *Tantundem faciemus, si prius* $\frac{4}{8}$. *reducamus ad* $\frac{1}{2}$. & *inseramus postea* $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. *hoc est, addamus* $\frac{2}{3}$. *vnius dimidij ad* $\frac{1}{2}$. *Eodem modo si inserantur* $\frac{6}{10}$. $\frac{4}{8}$. *fient* $\frac{64}{80}$. *id est,* $\frac{4}{5}$. *eademq́ minutia produce-*

tur, si prius $\frac{6}{10}$. *reducatur ad* $\frac{3}{5}$. *&* $\frac{4}{8}$.*ad* $\frac{1}{2}$. *inseranturq́;* $\frac{3}{5}$. $\frac{1}{2}$. *Producentur enim ex hac insitione* $\frac{8}{10}$. *hoc est,* $\frac{4}{5}$. *vt prius. Ratio huius rei est, quia cum præcedens minutia sit fractio totius sequentis, idem erit omnino valor* $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. *&* $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. *Si enim hæ minutiæ minutiarum reducantur ad simplices minutias, reducetur prior ad* $\frac{8}{24}$. *hoc est, ad* $\frac{1}{3}$. *posterior vero ad* $\frac{2}{6}$. *id est, ad* $\frac{1}{3}$. *quoque. Quod in priori regula non contingit. Cum enim ibi prior minutia sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, perspicuum est in eodem exemplo aliud esse* $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{8}$. *&* $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. *Prior enim minutia minutiarũ facit* $\frac{2}{24}$. *hoc est* $\frac{1}{12}$. *posterior vero* $\frac{2}{6}$. *id est,* $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIVNCVLÆ NONNVLlæ numerorum integrorum, ac minutiarum. Cap. XVI.

OPERÆ PRETIVM *me facturum arbitror, si priusquam ad alia pergam, subnectam hoc loco varias quæstiunculas numerorum integrorum, ac minutiarum; quæ per additionem, subtractionem, multiplicationem, diuisionemque soluuntur, tum quia in ijs soluendis studiosi sese exercere possunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia sæpenumero similes quæstiones præclarum vsum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.*

1. *A QVO numero subducta sunt, vel*

Inuẽtio numeri, a quo facta ẽ subtractio, vel faciẽda, vt propositus numerus relinquat.

subduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero subducta sunt, vel subduci debent $\frac{4}{11}$, vt relinquantur $8\frac{2}{3}$? Huiusmodi quæstiones soluũtur per additionem. Si enim numerum subtractũ, subtrahendumve adijcias numero, qui relinqui debet, conficies numerum, à quo datus numerus subtractus relinquet datum numerũ. Vt in priori quæstione, ex 23. & 47. fit numerus 70. Ab hoc ergo subducenda sunt 23. vt 47. relinquantur. In posteriori autem quæstione, ex $\frac{4}{11}$. & $8\frac{2}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{33}$. à quo si deducas $\frac{4}{11}$. relinquentur $8\frac{2}{3}$. vt patet, si reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in sequentibus quæstionibus obseruandũ etiam erit, hoc est, post absolutam operationem reducendæ erunt minutiæ productæ ad minimos terminos, vt in hac quæstione factum est.

Inuẽtio numeri subtracti, vel subtrahẽdi ex proposito numero vt alius datus numerus sit reliquus.

2. QVIS numerus subtractus est, aut subtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus est, vel auferri debet ex $\frac{8}{13}$. vt relinquantur $\frac{2}{7}$? Huius generis quæstiones expediet subtractio. Nam si numerus, qui relinqui debet, subducatur ex numero, a quo fieri debet subtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet residuum propositum. Vt in priori quæstione, subtractis 26. ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In posteriori autem quæstione, si auferantur $\frac{2}{7}$. ex $\frac{8}{13}$. restabunt $\frac{30}{91}$. quæ si subtrahantur ex $\frac{8}{13}$. relinquentur $\frac{2}{7}$.

3. CVI numero adijcienda sunt 38. aut

quis

quis numerus adijciendus eſt ad 38. vt numerus compoſitus ſit 83? Item cui numero addenda ſunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adijciendus eſt ad $4\frac{8}{9}$. vt componatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæſtiones eiuſmodi per ſubtractionem etiam ſoluuntur. Nam ſi ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propoſitum, relinquetur numerus, cui ſi adijciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæſtione, ſubductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo adijcienda ſunt 38. vt fiat numerus 83. In poſteriori autem quæſtione, ſubtractis $4\frac{8}{9}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{11}{18}$. cui ſi addas $4\frac{8}{9}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

Inuētio numeri, cui datus numerus adijciēdus ſit, vel qui dato numero ſit addendus, vt aliꝰ numerus datus remaneat.

4. *QVAE differentia, ſiue exceſſus eſt inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæſtiones per ſubtractionem explicantur. Si namque minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, ſiue exceſſus quæſitus. Vt in priori quæſtione, ſublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro exceſſu, differentiave inter 100. & 349. In poſteriori autem quæſtione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. reſtant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero ſuperat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{2}$.*

Inuentio differentiæ inter datos duos numeros.

5. *QVIS numerus diuiſus, vel diuidendus eſt per 9. vt quotiens ſit 34? Itē quis numerus diuiſus vel diuidendus eſt per $4\frac{1}{3}$. vt Quotiens ſit $\frac{1}{2}$? Tales quæſtiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuiſor datus per datū Quotientē multiplicetur, procreabitur numerus diuiſus,*

Inuētio numeri diuiſi, aut diuidendi per datū numerū, vt Quotiēs propoſitus proueniat.

 diui-

diuidendusve, qui quæritur. Ut in priori quæstione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiso per 9. Quotiens erit 34. In quæstione vero posteriori, si multiplicentur $4\frac{1}{3}$. per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuisus per $4\frac{1}{3}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

Inuẽtio numeri, q cõtineat, vel sit, aut det datã fractionẽ, seu partẽ, partesve propositi numeri.

6. *QVIS numerus continet $\frac{3}{5}$. huius numeri 30? Item quis numerus est, vel dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiusmodi quæstiones absoluit. Si enim dati duo numeri inter se multiplicentur, gignetur numerus quæsitus. Ut quoniam in priori quæstione ex multiplicatione $\frac{3}{5}$. per 30. producuntur 18. fit, vt numerus 18. contineat $\frac{3}{5}$. numeri 30. In posteriori autem quæstione, ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$.*

Inuẽtio numeri, per quẽ datus numerus sit diuisus aut diuidẽdus, vt Quotiens sit ꝓpositus numerus.

7. *PER quem numerum diuisa, aut diuidenda sunt 48. vt Quotiens sit 10? Item per quẽ numerum diuidentur $\frac{3}{7}$. vt Quotiens sit $\frac{2}{3}$. Diuisione similibus quæstionibus satisfiet. Nam si numerus diuisus, diuidendusve propositus, diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuisione diuisor quæsitus. Ut in priori quæstione, diuisis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem si diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In posteriori autem quæstione, diuisis $\frac{3}{7}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{14}$. per quem si diuidãtur $\frac{3}{7}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.*

8. *PER quem numerũ multiplicanda sunt 17. aut quis numerus multiplicandus est per 17.*

vt

vt productus numerus sit 100? Item per quem numerum multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus sit $\frac{1}{4}$. Diuisio quoque similibus quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum, qui produci debet, partiamur per numerum, qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{5}{17}$. per quem si multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datus numerus 100. In posteriori vero quæstione, si diuidatur $\frac{1}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{14}$. per quem si multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{1}{4}$.

Inuẽtio numeri, per quẽ datus numerus sit multiplicãdus, vel qui per datũ numerũ multiplicãdus sit, vt gignat numerus propositus.

9. QVI duo numeri inter se multiplicati producunt 48. vel $\frac{1}{2}$. vel $6\frac{3}{4}$? Diuisio quoque huiusmodi quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum producendum diuidamus per quemuis numerũ, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quæruntur. Vt si 48. diuidantur per quemcunque numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter se multiplicati producent 48. Sic etiam si eadem 48. diuidantur per alium numerum quemcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo hi numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter se multiplicati gignent hunc numerum 48. Item si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunque numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientẽ $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium numerum, vt per 8. reperie-

Inuentio duorũ numerorum, qui inter se multiplicati datũ numerũ producant.

mus Quotientem $\frac{1}{16}$. *Duo igitur numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant* $\frac{1}{2}$. *erunt* 8. *&* $\frac{1}{16}$. *Denique diuisis* $6\frac{3}{4}$. *per quemlibet numerum, vt per* $3\frac{1}{2}$. *fiet Quotiens* $1\frac{13}{14}$. *Duo ergo numeri, qui inter se multiplicati producant* $6\frac{3}{4}$. *erunt* $3\frac{1}{2}$. *&* $1\frac{13}{14}$.

Inuentio duorũ numerorũ, vt vno per alterũ diuiso, pueniat Quotiens propositus.

10. *QVI sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit* 28? *Item qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit* $\frac{5}{6}$? *Has quæstiones, & alias similes multiplicatio enodat. Si namque Quotientem datum multiplices per quemuis numerum, dabit Quotiẽs numerum diuidendum: diuisor autem erit numerus multiplicans assumptus. Vt in priori quæstione, si* 28. *multiplices per quemuis numerum, vt per* 6. *efficies numerum* 168. *Hic ergo diuisus per* 6. *faciet* 28. *In quæstione autem posteriori, si* $\frac{5}{6}$. *multiplices per quemlibet numerũ, vt per* $\frac{1}{2}$. *procreabis* $\frac{5}{12}$. *quibus diuisis per* $\frac{1}{2}$. *Quotiẽs erit* $\frac{5}{6}$.

Inuẽtio numeri, p quẽ dat⁹ numerus sit multiplicãdus vel q multiplicãdus sit per datũ numerũ, vt producto diuiso per aliũ datũ numerũ, proueniat Quotiens propositus.

11. *PER quem numerũ multiplicanda sunt* 7. *aut quis numerus multiplicandus est per* 7. *vt producto numero diuiso per* 8. *Quotiens sit* 3? *Itẽ per quem numerum multiplicari debent* $\frac{2}{5}$. *Aut quis numerus per* $\frac{2}{5}$. *multiplicandus est, vt producto numero per* $\frac{3}{4}$. *diuiso, Quotiens sit* $\frac{1}{4}$? *Quæstiones huiusmodi multiplicatione, & diuisione soluuntur. Nam si diuisorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumque productum per datum numerum multiplicandum, multiplicantemve partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæstione, si multiplice-*

tur

tur diuisor datus 8.per datum Quotientem 3.producetur numerus 24. qui diuisus per numerũ multiplicandum, multiplicantemve datum, nẽpe per 7.faciet $3\frac{3}{7}$. numerum quæsitum. Si enim multiplicentur 7.per $3\frac{3}{7}$ fiet numerus 24. qui diuisus per 8.faciet Quotientẽ 3. In posteriori vero quæstione, si diuisor datus $\frac{3}{4}$. multiplicetur per datum Quotientem $\frac{1}{4}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{2}{5}$. numerum multiplicantem, multiplicandumve datum faciet $\frac{15}{32}$. numerum quæsitum. Si namque $\frac{2}{5}$. multiplicentur per $\frac{15}{32}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{3}{4}$. faciet Quotientem $\frac{1}{4}$.

12. *QVOTA pars est numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars est hic numerus $\frac{3}{5}$. huius numeri $\frac{9}{10}$? Quæstiones tales per diuisionem explicantur. Nam si numerus datus, qui debet esse pars per alterum datum numerum (qui semper maior esse debet altero) diuidatur, indicabit Quotiens, quota pars, aut partes sit numerus datus numeri dati. Vt in vriori quæstione, diuisis 6.per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id est, $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 6.vna nona pars numeri 54. In posteriori autem quæstione, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{9}{10}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{3}{5}$. duas tertias partes numeri $\frac{9}{10}$. Hoc autem ita esse experiri licebit per sextam quæstionem. Si enim quæratur numerus, iuxta illam quæstionem, qui sit $\frac{1}{9}$. numeri 54. reperietur numerus 6. Si itẽ inuestigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{9}{10}$. inuenietur numerus $\frac{18}{30}$. hoc est, $\frac{3}{5}$.*

Inuentio partis quã datus numerus exhibet respectu alterius numeri dati.

Inuentio numeri, respectu cui' datus numerus exhibeat partē propositā.

13. NVMERVS hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{3}{5}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuisio quæstiones tales soluit. Si namque datus numerus diuidatur per minutiam, quæ significet propositam partem, partesve, dabit Quotiens numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 6. per $\frac{1}{9}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæstione vero posteriori, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{10}$. Huius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{3}{5}$.

Inuentio multitudinis partiū quarumcūque, quas datus numerus continet.

14. HIC numerus 7. quot octauas partes vnius integri comprehendit? Item numerus hic $\frac{3}{4}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{7}$. quot octauas vnius integri complectitur? Multiplicatio huius generis quæstiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorem partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerum partium quæsitum. Vt in prima quæstione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In secunda autem quæstione, multiplicatis $\frac{3}{4}$. per 12. fiunt 9. Numerus ergo $\frac{3}{4}$. complectitur nouem duodecimas. In tertia denique quæstione, multiplicatis $\frac{3}{7}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{7}$. hoc est, $3\frac{3}{7}$. Numerus ergo $\frac{3}{7}$. continet tres octauas, & $\frac{3}{7}$. vnius octauæ. Atque hoc ita esse, perspicuū est. Si enim $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$. hoc est, $\frac{3}{56}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam summam colligantur, deprehendentur $\frac{3}{7}$. Ex quo fit, $\frac{3}{7}$. continere $\frac{3}{8}$. & $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$.

RE-

REGVLA TRIVM, QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIue regula proportionnm dici solet.

Cap. XVII.



ACTENVS iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vsus apparet, non solum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, si in commercijs, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac necessariæ. Primo autem loco sese offert regula illa nunquam satis laudata, quæ ob immensam vtilitatem, Aurea dici solet, vel regula proportionum, propterea quòd in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti sunt, quartus autẽ ignotus quæritur, versetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata est: quòd tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum se habet.

Regula aurea, siue proportionũ, aut regula triũ, cur sic dicta sit.

DISPOSITIS tribus numeris notis, ita vt is, qui quæstionem habet annexã, (Semper enim vnus illorum quæstionem secum affert, ut in exemplis

Numeri in regula triũ quo pacto sint collocandi.

plis apparebit.) tertio statuatur loco; reliquorũ autem ille, qui de eadem est re; hoc est, qui tertio similis est, (Exempla autem declarabunt, in quo similitudo hæc consistat.) primum occupet locum, mediam denique sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet: Dispositis, inquã, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter se, productusque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus, erit quartus, qui quærebatur, satisfacietque quæstioni propositæ: hoc est, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad secundum.

Quo pacto per regulã triumquartus numerus ignotus sit inquirẽdus.

Exemplum.

QVATVOR aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi possint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere possint: Huic numero similis est numerus 4. aureorum. Nam sicut 4. aureis emptæ sunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ sunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus sit pretium: at 12. libræ piperis sunt merces. Ita ergo stabit exemplum.

Aurei.	*Lib.*	*Aurei.*		*Lib.*
4.	12.	20?	*fiunt*	60.

Multiplicando autem inter se secundum, & tertium numerum, & productũ 240. per primum dini-

diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars est secundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem esse quarti numeri inuenti 60.

Aliud exemplum.

AVREOS 60. expendo 5. mensibus, peto, 132. aureos quot mensibus expendam? Hic etiam cernis, quæstionem fieri de 132. aureis, & huic numero similem esse hunc 60. aur. Sic igitur exemplum stabit.

Aurei.	Menses.	Aurei.		Menses.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem secundum numerum, & tertium inter se, productumq; 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menses, quibus expẽdam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. secundum 5. complectitur duodecies.

DEMONSTRATIO *huius regulæ hęc est. Quoniam eadem proportio esse debet primi numeri ad secundum, quæ tertij ad quartũ inuentũ, vt dictum est, & ex propositis exemplis constat; necesse est, ex propos. 19. lib. 7. Eucl. eundẽ numerũ produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex secundo in tertiũ gignitur. Cum* Demõstratio regulæ trium.

igitur

igitur numerus ex secũdo in tertiũ productus diuidatur per primũ, vt quartus inueniatur, vt regula triũ præcipit; fit vt primus numerus per Quotientem, hoc est, per quartum numerum inuentũ multiplicatus producat eundem numerum diuisum, qui nimirum ex secundo in tertium fuit procreatus. Nam numero quolibet per aliũ quemuis numerum diuiso, si diuisor per Quotientem multiplicetur, necessario numerus diuisus rursus procreatur, vt in tertio examine Diuisionis integrorum cap. 5. dictum est. Id quod etiam constat ex definitionibus Diuisionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo proposito declarabimus. Numerus 12. diuidatur per 4. vt fiat Quotiens 3. qui nimirum, secundum definitionem diuisionis cap. 5. traditam, toties vnitatem contineat, quoties diuisus numerus 12. diuisorem 4. continet. Dico si multiplicemus diuisorem 4. per Quotientem 3. necessario rursus produci diuisum numerum 12. Nam cum, iuxta definitionem Multiplicationis cap. 4. traditam, numerus procreari debeat, qui toties contineat diuisorem 4. qui est vnus numerorum multiplicantium, quoties numerus Quotiens 3. qui est alter numerus multiplicans, vnitatem continet; contineat autem diuisus numerus 12. toties diuisorem 4. quoties numerus Quotiens 3. vnitatem includit, vt dictum est; liquido constat, numerum diuisum 12. ex dicta multiplicatione diuisoris 4. per Quotientem 3. procreari. Eademq́; ratio est in omnibus alijs numeris. Quæ cum ita sint, erit omnino numerus Quotiens per regulam

Numero p aliũ diuiso si diuisor p Quotien té multiplicet, cur rursum numerus diuisus pducatur.

trium

trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quaeritur, vt ex dicta propos. 19. lib. 7. Eucl. constat: quandoquidem idem numerus producitur ex primo numero in quartum, qui ex secundo in tertium, vt diximus.

EX his, quae proxime scripsimus, facile colligitur, qua ratione regula trium possit examinari. Nam si idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentum, qui ex secundo in tertium, dubitandum non est, quin recte inuentus sit quartus numerus proportionalis: si vero non idem numerus gignatur, repetenda erit operatio. Probatio regulę trium

EST tamen alia probatio regulae trium, à plerisque vsurpata, quae fit hoc modo. Statuatur primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartusq; in medio. Si namque, iuxta praeceptum regulae trium, reperiatur hoc modo quartus numerus, qui prius erat secundus, recte soluta fuit quaestio proposita. Ut primum exemplum supra allatum ita stabit. Alia probatio regulae trium.

Aurei.	*Librae.*	*Aurei.*		*Librae.*
20.	60.	4.	*fiunt*	12.

Nam si verum est, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptae sunt librę 12. efficitur necessario, ut uicissim 4. aureis, emantur librę 12. hoc ipso, quòd 20. aureis librae 60. emantur.

POSSVNT interdum duo numeri ex datis tribus, vt primus & secundus, uel primus & tertius, Cōpendia regulę triũ varia.

tertius, ad minores redigi, vt facilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, si tam primus, quàm secundus; vel tam primus, quàm tertius, per communem aliquam vtriusque mensuram notam, siue ea maxima sit, siue nō maxima, diuidatur, et loco illorū Quotientes statuantur. Vt in hoc exemplo.

4. 12. 20. *fiunt* 60.

Quoniam numerus 4. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroque per 4. Quotientes 1. & 3. *pro illis ponantur, ita stabit exemplum.*

1. 3. 20. *fiunt* 60.

Item quia in eodem exemplo numerus idem 4. numerat primum & tertium, si, diuiso vtroque per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, sic stabit idem exemplum.

1. 12. 5. *fiunt* 60.

Item in sequenti hoc exemplo.

36. 48. 63. *fiunt* 84.

Quoniam numerus 12. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroque pro 12. Quotientes 3. & 4. pro illis reponantur, ita stabit exemplum.

3. 4. 63. *fiunt.* 84.

Item

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertium in eodem exemplo, si, diuiso vtroque per 9. Quotientes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, sic stabit exemplum.

4. 48. 7. *fiunt* 84.

R V R S V S *hoc etiam modo quæstio proposita soluetur. Diuidatur secundus numerus per primum, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotiẽtem multiplicetur medius. Vtroque enim modò productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.*

60. 360. 132. *fiunt* 792.

Diuiso secundo numero per primum, fit Quotiens 6. per quẽ si multiplicetur tertius numerus, gignetur quartus 792. ac si iuxta preceptum regulæ trium operatus esses. Item diuiso tertio numero per primum, fit Quotiens $2\frac{12}{60}$. *hoc est,* $2\frac{1}{5}$. *siue* $\frac{11}{5}$. *per quem si multiplicetur secũdus, producetur idem quartus* 792.

H I S *recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte sit inuentus, necne. Nam si per varias huiusmodi operationes eundem semper quartum numerum repereris, maximo argumento est, operationem recte esse institutam.* Variæ probationes regulæ triũ.

Q V O D *si quis roget, qui fieri possit, vt*

Demõstratio compédiorũ regulæ triũm.

per tot vias ad eundem semper scopum perueniamus, sciat, huius rei causam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadem proportio esse debet inter primum numerum, & secundũ, quæ inter tertium, & quartum; fit vt & permutando eadem proportio sit inter primum, & tertiũ, quæ inter secundum, & quartum; Item & conuertendo eadem inter secundum, & primum, quæ inter quartum, & tertiũ; nec non eadem inter tertium, & primum, quæ inter quartum, & secundũ. Cum ergo semper eadem proportio sit inter Quotiẽtes duorum numerorum per eundem numerum diuisorum, quæ inter ipsos numeros; perspicuum est, si diuidatur tam primus numerus, quàm secundus vel tam primus, quàm tertius, per communem aliquam mensuram eandẽ, & pro ipsis numeris Quotientes reponantur, esse adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & secundi numeri, quæ est inter tertium numerum, & quartũ; Item eandem esse proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ est inter secundum numerum, & quartum. Rursus quoniam, diuiso numero quouis per alium numerum, producitur denominator proportionis, quam diuisus numerus habet ad diuisorem, denominator autem alium quemcunq; numerum multiplicans producit numerũ, qui ad multiplicatum proportionem habet à dicto denominatore denominatam; fit, vt diuiso secundo, aut tertio numero per primum, Quotiens sit denominator proportionis secundi, aut tertij numeri ad primum. Quare si per huncQuotientem multi-

plice-

plicetur tertius numerus, aut secundus, procreabitur quartus, qui videlicet eandem proportionem habeat ad tertium, quam secundus ad primum, vel eandem ad secundum, quam tertius ad primum.

QVONIAM vero frequenter quæstiones per regulam trium soluendæ præpostero ordine proponuntur, interdum etiam diuersæ monetæ, mensuræ, vel pondera in vno numero reperiuntur, deniq; non raro primus numerus dissimilis est tertio, vt facile hærere, atque impediri possit is, qui parum in rebus Arithmeticis est versatus, explicabimus quæstionibus aliquot varias difficultates, quæ occurrere possunt; hinc exordientes. Qõnes nõnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicantur.

1. *QVANTI constat vna libra piperis, si 60. libræ emptæ sint aureis 20? In hac quæstione præpostere positi sunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæstionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locũ, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ sit similis. Itaque recto ordine proponenda fuisset quæstio hoc modo. Libræ 60. piperis constant 20. aureis, libra ergo 1. quanti constabit? vt in apposito hic exemplo apparet.*

Lib.	*Aur.*	*Lib.*		*Aur.*
60.	20.	1?	*fiunt*	$\frac{20}{60}$. *siue* $\frac{1}{3}$.

Inuenies autem (si secundum numerum per tertiũ multiplices, productumque 20. per primum partiaris) valorem 1. libræ esse $\frac{20}{60}$. *vel* $\frac{1}{3}$. *vnius au*

rei, quia cum minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio, cuius numerator est numerus diuidendus, denominator autem diuisor, vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur autem vtrauis harum minutiarum, nempe prior, ad baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnum aureum conficiunt.) productusque numerus 2000. per denominatorẽ 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{2}{6}\frac{0}{0}$ *siue* $33\frac{1}{3}$. *Tantundem inuenisses, si posterioris minutiæ* $\frac{1}{3}$. *numeratorem per 100. multiplicasses, productúque per denominatorem distribuisses. Quòd si* $\frac{1}{3}$. *vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumq; per denominatorem partiteris. Inuenies enim quatr.* $1\frac{1}{3}$. *Itaq; 1. libra constabit baioc. 33. quatr.* $1\frac{1}{3}$.

Quæstio 2. 2. *SI libræ* $10\frac{2}{5}$. *& vnciæ* $7\frac{1}{2}$. *ceræ albæ constent aureis 2. & Iul. 6. quãtum ceræ emetur baiochis 90? Sic stabit exemplum.*

Aur. Iul.	Lib. Vnc.	Baioc.	Vnc.
2. 6.	$10\frac{2}{5}$. $7\frac{1}{2}$.	90? fiunt	$45\frac{2}{2}\frac{0}{6}\frac{7}{0}$.

Quid agẽdum qñ diuersæ monetæ, mẽsuræ, põdera, & fractiones occurrunt.

Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuersæ monetę continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetã ibi expressam, vt ad baiochos, eruntque in primo numero baiochi 260. Rursus quia in secundo numero reperiuntur diuersa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expressa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt,

eruntq;

erunt q; in $10\frac{2}{5}$. *libris vnciæ* $124\frac{4}{5}$. *quibus si addantur vnciæ* $7\frac{1}{2}$. *fient vnciæ* $132\frac{3}{10}$. *Quo pacto autem fractiones vel solæ, vel vnà cum integris multiplicari inter se debeant, aut diuidi, docuimus cap. 13. & 14. Itaq; sic stabit exemplum reductum.*

Baioc.	Unc.	Baioc.	Unc.
260.	$132\frac{3}{10}$.	90?	*fiunt* $45\frac{207}{260}$.

ILLVD *vero hoc loco annotandum est, minutiam ex multiplicatione medij numeri per tertium productam, licet eius numerator sit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuisio sit absoluta, ne operatio impediatur. Unde quia tunc multiplicatio medij numeri per tertiũ facit* $\frac{119070}{10}$. *diuidenda erit hæc minutia, antequam ad integra reducatur, per primum numerum: quę diuisio dabit hanc minutiam* $\frac{119070}{2600}$. *continentem vncias* $45\frac{207}{260}$.

3. QVANTI *constabunt* $\frac{7}{8}$. *vnius vlnæ panni, si* $\frac{3}{4}$. *vnius aur. quispiam emerit* $\frac{1}{3}$. *vnius vlnæ? Sic stabit exemplum.* Quęstio 3.

Vlnæ	Aur.	Vlnæ.	Aur.
$\frac{1}{3}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$?	*fiunt* $1\frac{31}{32}$.

Multiplicatio medij numeri per tertium facit minutiã $\frac{21}{32}$. *qua diuisa per primum numerũ, inuenietur minutia hæc* $\frac{63}{32}$. *vnius aurei, quæ facit aur.* $1\frac{31}{32}$. *Reducta autem hæc minutia* $\frac{31}{32}$.

vnius aurei ad Iulios, baiochos, & quatrinos, dat Iul.9.baioc.6.quatr.$3\frac{1}{2}$.

Quæstio 4. 4. *STVDIOSVS quidam in Vniuersitate volens dare operam literis 6.annos, animaduertit se 7.mensibus, & 13. diebus expēdisse aureos 200.Iulios 7.baiochos $8\frac{2}{7}$. Quæritur ergo, quanta pecunia indigeat. Ita stabit exemplum.*

Mē.	Di.	Aur.	Iul.	Baioc.	An.	Aur.	Baioc.
7.	13.	200.	7.	$8\frac{2}{7}$.	6. fiūt	1956.	$7\frac{\ }{1}\frac{1}{5}\frac{9}{7}\frac{1}{5}$

Hic in primo numero menses, & in tertio anni ad dies reuocandi sunt. Quod vt fiat, considerandum est, quinam menses illi sint, quia non omnes menses eundem dierum numerum continent. Nam si ponamus priores septem menses, initio facto à Ianuario, continebunt dicti 7. menses in anno communi dies 212. vt hic vides, (in anno vero bissextili 213. cum in eo Februarius contineat dies 29.) Additis diebus 13. fient dies 225. Deinde cōsiderandum est, quot anni bissextiles in illis 6. annis contineantur. Nam pro singulis addēdus est dies 1. ad dies 365. anni vnius cōmunis. Vnde si ponamus duos annos bissextiles contineri, multiplicabimus 6.annos per 365. dies, & pro-

Ian.	31.
Febr.	28.
Mar.	31.
Apr.	30.
Maius.	31.
Iun.	30.
Iul.	31.
	212.
	13.
	225.

ducto

ductо numero addemus 2. vt efficiantur dies 2192. Rursus in numero medio redigendi sunt aurei, & Iulij ad baiochos, qui erunt numero 20078 $\frac{2}{7}$. ita vt exemplum reductum ita se habeat.

Dies.	Baioc.	Dies.	Baioc.
225.	20078 $\frac{2}{7}$.	2192.	*fiunt* 195607 $\frac{191}{1575}$.

Postremo reducendus erit quartus numerus inuẽtus baiochorum ad aureos, & Iulios. Faciunt autem omnes illi baiochi aureos 1956. Iul. 0. baioc. 7 $\frac{191}{1575}$. Tanta pecunia necessaria est studioso illi 6. annis, quorum duo bissextiles sint.

HAC eadem ratione post operationem semper reducenda est moneta quarti numeri ad maiorem, si fieri potest: Item pondera, mensuræve ad maiora pondera, vel mensuras; vt vnciæ ad libras; palmi, vel pedes ad passus, passus autem ad milliaria.

5. QVIDAM conficit 7. diebus milliaria 210. Peto quot diebus milliaria 1600. cõficiet, si quotidie iter faciat, & cursum nec remittat, nec intendat? Sic ponetur exemplum. Quæstio 5.

Milliar.	Dies.	Milliar.	Dies.
210.	7.	1600.	*fiunt* 53 $\frac{70}{210}$.

Fractio hæc $\frac{70}{210}$. vnius diei in quarto numero, si numerator per 24. multiplicetur, productusque numerus per denominatorem diuidatur,

redigetur ad horas 8.

Quæstio 6. *6. SI aureis 100. Iulijs 7. baiochis 8. emptus sit ager passuum quadratorum 400. quanti constabit ager passuum quadratorum 1000. pedum quadratorum 4. & palmorum quadratorum. 3? ita stabunt exemplum.*

Passus.	Aur. Iul. Baioc.	Pass. Ped. Palm.
400.	100. 7. 8.	1000. 4. 3?

fiunt Baioc. $25199 \frac{1}{8} \frac{7}{0} \frac{6}{0} \frac{1}{0} \frac{3}{0}$.

Reductis aureis, ac Iulijs secundi numeri ad baiochos; & passibus, ac pedibus tertij numeri ad palmos; tribuendo 16. palmos quadratos vni pedi quadrato, & 25. pedes quadratos vni passui quadrato; necnon & passibus primi numeri reductis ad palmos quoque, tribuendo vni passui quadrato 400. palmos quadratos; ita stabit exemplum reductum.

Palmi.	Baioc.	Palmi.		Baioc.
160000.	10078.	400067?	fiūt	$25199 \frac{1}{8} \frac{7}{0} \frac{6}{0} \frac{1}{0} \frac{3}{0}$

Quartus autem numerus baiochorum continet aur. 251. Iul. 9. baioc. 9 $\frac{1}{8} \frac{7}{0} \frac{6}{0} \frac{1}{0} \frac{3}{0}$.

Quæstio 7. 7. *IN nundinis quibusdā 44. aureis emptæ sunt 52. vlnæ panni cuiusdam, quanti constabunt vlnæ 260. eiusdem panni? Ita stabit exemplum.*

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
52.	44.	260?	fiunt.	220.

8. EMIT

8. EMIT quispiam 52. vlnas panni 44. aureis, quot vlnas emet aureis 220? Exemplum ita disponetur. Quæstio 8.

Aur.	vlnæ.	Aur.		vlnæ.
44.	52.	220?	fiunt	260.

9. EMIT quispiam summa quadam pecuniæ 52. vlnas panni, atque eodem pretio accepit postea 260. vlnas, quæ constiterunt aureis 220. quid ergo prius expendit? Disponetur exemplum hoc modo. Quæstio 9.

vlnæ.	Aur.	vlnæ.		Aur.
260.	220.	52?	fiunt	44.

10. VLNAS aliquot panni emit quidam 44. aureis, atq; eodem pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo ulnas prior emit? Stabit exemplum hoc modo. Quæst. 10.

Aur.	vlnæ.	Aur.		vlnæ.
220.	260.	44?	fiunt	52.

APPOSVI quatuor hæc postrema exempla, in quibus ijdem quatuor numeri regulæ triũ varijs modis vices inter se permutant, quippe cũ quisque illorum ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæstionibus similibus.

RE-

REGVLA TRIVM EVERSA. Cap. XVIII.

DIXIMVS, in quatuor numeris regulę trium eam proportionem esse primi numeri ad secundum, quæ est tertij ad quartum, atque adeo, (vt ex propos. 14. lib. 5. Eucl. colligitur.) si primus maior est, vel minor tertio, secundum quoque maiorem esse, vel minorẽ quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perspicuũ esse potest. Solet autem nonnunquam accidere, vt quò maior est primus numerus tertio, eò minor esse debeat secundus quarto; & quo minor est primus tertio, eo maior esse debeat secundus quarto. Quare cõtraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per secundum multiplicandus, numerusq́; productus per tertium diuidendus. Quãdo autem hæc regula trium euersa (ita eam appellant) adhibenda sit, & ratio naturalis dictare videtur, & clarissime ex sequentibus exemplis intelligi potest, quorum primum hoc sit.

Regula triũ euersa quo pacto quartũ numerũ eliciat.

Quęstio 1. 1. PANNVS 9. vlnarum, cuius latitudo est 3. palmorum, emitur à quodam, vt sibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnę alterius panni, cuius latitudo est 2. palmorum, requiruntur ad eandem tunicam, vel similem conficiendam? Quoniam quæstio est de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita stabit exemplum.

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.		Vlnæ.
3.	9.	2?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

Hic

Hic manifeste vides, quo angustior est secundus pannus, eo plures vlnas esse necessarias. Quare licet primus numerus tertio maior sit, non tamen propterea secundus maior etiam esse debet quarto, sed minor; ita vt quam proportionē habet tertius numerus ad primum, eam habeat secūdus ad quartum. Hinc fit, vt primus per secundum sit multiplicādus, numerusq; productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	vlnæ.	Vlnæ.
2.	3	9? fiunt	$13\frac{1}{2}$.

2. QVIDAM accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos 3, quos cum ei restitueret, nullum censum accipere voluit, sed tantum petijt, vt ei vicissim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniam istam retinere debet, vt ei satisfiat pro beneficio præstito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? In hac quæstione, quia numerus 7480. aur. secum habet quæstionem, collocandi erunt numeri hoc ordine. Quæstio 2.

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000.	3.	7480?	fiunt	1.	220.	$13\frac{8}{1}\frac{9}{8}\frac{9}{7}$.

Perspicuum etiam hic est, maiorem censum deberi

in æquali tempore aureis 7480. quàm aur. 4000. atque adeo minori tẽpore opus esse; quàm 3. ann. vt idem census, qui debetur aur. 4000. tribus annis, lucrifiat ex aur. 7480. Quare licet primus numerus minor sit, quàm tertius, non tamen idcirco secundus minor etiam erit, quàm quartus, sed maior; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat secundus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum esse primum per secundum, productumq́; numerum per tertium diuidendum: quia ut debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Aur.	*Aur.*	*Anni.*		*Anni.*	*Dies.*	*Horæ.*
7480.	4000.	3?	*fiunt*	1.	220.	$13\frac{}{1}\frac{8}{8}\frac{9}{7}$.

Quæstio 3. 3. *QVANDO mensura tritici emitur 6. aureis, panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem, pondus habet 10. vnciarũ; Iam si eadem mensura tritici ematur 4. aureis, vel 8. aureis; quantum esse debet eiusdem panis pondus? Ita stabunt exempla.*

Aur.	*Vnciæ.*	*Aur.*		*Vnciæ.*
6.	10.	4?	*fiunt*	15.
6.	10.	8?	*fiunt*	$7\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quo vilius est triticum, eo maius põdus habiturum panem, & quo carius, eo minus.

Talis

Talis enim proportio debet esse 4.aur.ad 6. aur. vel 8.aur.ad 6.aur.qualis est pōderis 10. vnciarū ad pondus ignotū, quod quæritur. Vnde iuxta regulā proportionum ita collocandi essent numeri.

Aur.	*Aur.*	*Vnciæ.*		*Vnciæ.*
4.	6.	10.	*fiunt*	15.
8.	6.	10?	*fiunt*	$7\frac{1}{2}$.

4. OPERARII *30.perficiūt opus quoddam in 4.annis; quanto ergo tempore idem absoluent 50. operarij, vel 20? Vel, quot operarij idē absoluent in annis 2.& diebus 146? Vel in annis 4.& diebus 292? Quadruplex hoc exemplum ita stabit, reductis annis (quorum quilibet statuatur dierū 365.) ad dies, in posterioribus duobus exemplis.* Quæstio 4.

Operarij.	*Anni.*	*Operarij.*		*Anni.*	*Dies.*
30.	4.	50?	*fiunt*	2.	146.
30.	4.	20?	*fiunt*	6.	0.

Dies.	*Operarij.*	*Dies.*		*Operarij.*
1460.	30.	876?	*fiunt*	50.
1460.	30.	1752?	*fiunt*	25.

Quo enim plures sunt operarij, eo minore tempore opus est; quo autem pauciores, eo maiore.

Item

Item quo minus tempus est, eo pluribus operarijs opus est, quo autem maius, eo paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij.	Operarij.	Anni.		Anni.	Dies.
50.	30.	4?	*fiunt*	2.	146.
20.	30.	4?	*fiunt*	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30?	*fiunt*	50.
1752.	1460.	30?	*fiunt*	25.

Quęstio 5. 5. O B S E S S V S *quidam exercitus* 8500. *militum victum habet ad* 11. *menses; verum spes nulla est solutionis obsidionis, vel futuri auxilij, nisi post* 25. *menses. Quot ergo milites retinendi sunt, vt reliquis victus sufficiat ad* 25. *menses? Numeri ita disponendi sunt.*

Menses.	Milites.	Menses.		Milites.
11.	8500.	25?	*fiunt*	3740.

Retinendi ergo erunt milites 3740. *his enim victus sufficiet ad* 25. *menses, dimittendiq; propterea erunt milites reliqui* 4760.

REGVLA TRIVM COMPOSITA. Cap. XIX.

FIT, vt interdum plures, quàm tres numeri proponantur noti, ita tamen, vt sint semper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrum, damnumve. Quod vbi contigerit, fit regula trium composita, & tunc vel instituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet per sibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe alia quædam via tentanda. Id quod sequentibus exemplis perspicuum fiet, in quibus variæ quæstiones de lucro, damno, interueniente etiam diuersitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. discutientur. Regula triũ cõposita qd & qũo fiat.

1. SVNT 8. in communi conuictu, quorũ singuli singulis mensibus soluunt 6. aureos. Quãtum ergo erit pretium victus omniũ ad 4. annos? Hæc quæstio ita recte proponeretur. Vnus in vno mense soluit 6. aureos: quid ergo soluent 8. in 4. annis, hoc est, in 48. mensibus? Ita autem collocandi erunt numeri. Quæstio 1.

Conuictor.	Menses.	Aur.	Conuictores.	Menses.
1.	1.	6.	8.	48?

fiunt Aur. 2304.

Vbi vides, primum numerum vnius conuictoris habe-

habere adiunctum vnum mensem, tertium autem 8. conuictorum habere adiunctos 48. menses. Primo ergo ita instituetur regula trium. Si vnus soluit 6. aureos, quantum soluent 8? vt hic.

Conuict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. conuictores in vno mense 48. aureos, cum vnus soluat 6. aureos in mense. Secundo ergo iterum ita instituetur regula trium. Si in vno mense soluunt 48. aureos, quantum soluent in 48. mensibus? vt hic.

Mensis.	Aur.	Menses.		Aurei.
1.	48?	48?.	fiunt	2304.

BREVIVS *tamen eadem quæstio explicabitur, si tam duo numeri in principio quæstionis primo loco positi inter se, quàm duo tertio loco positi inter se multiplicentur, vt fiant tres numeri regulæ trium hoc modo.*

	Aur.			Aur.
1.	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatione procreatur numerus maior conuictorum pro vno mense, qui æquiualet minori pro pluribus mensibus. Vt ex multiplicatione 8. conuictorum per 48. menses producuntur 384. conuictores pro vno mense. Si enim singu-

ſingulis menſibus ſunt 8, conuictores, procul dubio in 48. menſibus, ſi accederent ſemper noui cõuictores, fierent 384. conuictores: atq; ita tantũ ſoluẽt hi 384. conuictores in vno mẽſe, quantũ 8. cõuictores in 48. menſib. Hæc eſt cauſa, cur multiplicandi ſint numeri principales, per adiũctos minus principales, qui tẽpus ſignificãt, vel aliud quippiã, dũmodo nõ ſit de eadẽ re, quã ſignificãt numeri principales; alioquin non eſſent duo numeri, ſed vnus. Vt ſi in aliquo loco poſiti ſint aurei, baiochi, & quatrini, cenſebuntur tres hi numeri pro vno, cum ſint de eadem re, vtpote qui monetã ſignificent. Eademque ratio eſt proportione quadam in alijs huiuſmodi quæſtionibus.

2. PRO 200. *libris quarundam merciũ aduectis per* 100. *milliaria ſoluendi ſunt* 4. *aurei. quantum ergo ſoluendum eſt pro* 300. *libris aduectis per* 400. *milliaria? Ita collocabuntur numeri.* Quæſtio 2.

Lib. Mill.	Aur.	Lib. Mill.		Aur.
200. 100.	4.	300. 400?	*fiunt*	24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter ſe, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

	Aur.			Aur.
20000.	4.	120000?	*fiunt*	24.

SI *eadẽ hæc quæſtio ſoluenda ſit per regulam triũ bis repetitã, ita ſtabit primo loco exemplũ.*

L Lib.

Lib.	Aurei.	Lib.		Aurei.
200.	6.	300?	fiunt	4.

Atque ita soluendi essent 6.aurei pro 300.libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirum 200.libræ sunt aduectæ: Sed quoniam 300.libræ vehendæ sunt per 400.milliaria, ita rursus stabit secundo loco exemplum.

Mill.	Aur.	Mill.		Aur.
100.	6.	400?	fiunt	24.

Quęstio 3. 3. *TRES Personę consumunt modium tritici 3. aureis emptum in 5. septimanis, quantus ergo est singularum sumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt.*

Pers.	Sept.	Aur.	Pers.	Dies.
3.	5.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. *hoc est, quatrini* $11\frac{3}{7}$.

Reductis autem 5. septimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius similes sint, ita stabit exemplum.

Pers.	Dies.	Aur.	Pers.	Dies.
3.	35.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. *hoc est, quatrini* $11\frac{3}{7}$.

Mul-

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij inter se, disponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

Aur.		Aur.		quatrini.
105.	3.	1?	*fiunt* $\frac{3}{105}$. *hoc est*,	$11\frac{3}{7}$.

P E R *regulam trium bis repetitam ita soluetur eadem quæstio.*

Pers.	Aur.	Pers.		Aur.
3.	3.	1?	*fiunt*	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.	Aur.	quatrini.
35.	1.	1?	*fiunt* $\frac{1}{35}$. *hoc est*,	$11\frac{3}{7}$.

4. S I 300. *aurei in* 4. *annis lucrantur* 100. *aureos, quid lucrabuntur* 1580. *aurei in* 7. *annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita stabit exemplum.* Quæstio 4.

	Aur.			Aur.
1200.	100.	11060?	*fiunt*	$921\frac{2}{3}$.

P E R *regulam trium bis repetitam ita stabit exemplum.*

Aur.	Aur. lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300,	100,	1580?	*fiunt*	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7?	*fiunt*	$921\frac{2}{3}$.

Quæstio 5. 5. *QVIDAM in tribus mensibus 10. aureis lucratus est 4. aureos. in quanto ergo tempore 100. aureis lucrabitur 2000. aureorũ? Hæc quæstio redigi non potest ad simplicem regulam triũ, propterea quòd tempus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotum est, atque adeo per 100. aureos multiplicari non potest. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo.*

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100?	*fiunt*	40.

Atque ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos in tribus mẽsibus, in quibus 10. aurei lucrati sunt 4. Quare vt sciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi sunt 2000. instituetur secundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menses.	Aur.		Menses.
40.	3.	2000?	*fiunt*	150.

Itaque si 10. aurei in 3. mensibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. mensibus. Quod facile probabitur, si quæstio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. mens. lucrãtur 4. aur. quantum in 150. mens. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.

Aur. Menſ.	Aur.	Aur. Menſ.		Aur.
10. 3.	4.	100. 150.	*funt*	2000.

Nam ſi tempus quodlibet per ſuam pecuniã multiplicetur, ſtabit exemplum ad ſimplicem regulã trium reductum hoc modo.

	Aur.			Aur.
30.	4.	15000.	*funt*	2000.

6. *SI* 100. *aurei in* 8. *menſibus lucrantur* 20. *aureos, in quanto tempore ijdem* 100. *aurei lucrabuntur* 3000. *aur? Diſpoſitio numerorum ita ſe habet.* Quæſtio 6.

Aur.	Menſ.	Aur.		Menſ.
20.	8.	3000?	*funt*	1200.

Quando enim eadem ſemper ſumma exponitur ad lucrũ, non ponenda eſt ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quãdo idem tempus proponitur, vt in ſequenti exemplo apparebit.

7. *SI* 300. *aurei in* 7. *menſibus lucrãtur* 45. *aureos, quid lucrabuntur* 1780. *aurei in eiſdem* 7. *menſibus? Ita ſtabit exemplum.* Quæſtio 7.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
300.	45.	1780.	*funt*	267.

8. *SI ſingulis militibus in ſingulos menſes tribuerentur* 4. *aurei, quantum pecuniæ expen-* Quæſtio 8.

deretur in militibus 13000. nouem mensibus? Ita stabit exemplum.

Milit. Mens.	Aur.	Milit. Mens.	Aur.
1. 1.	4.	13000. 9?	fiunt 468000.

Quæstio 9. 9. SI 10. *equis quotidie dentur 7. mensuræ hordei, vel auenæ, quot mensuræ, iuxta eandem distributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? ita stabit exemplum.*

Equi. Dies.	Mensuræ.	Equi. Dies.	Mensuræ.
10. 1.	7.	100. 20?	fiunt 1400.

Quæst. 10. 10. SI *duodecim messores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. messores demetent 45. iugera? Hic opus est regula trium bis repetita, primo tamen loco euersa, quòd 30. messores minori tempore indigeant ad demetēda 20. iugera, quàm 12. messores. Ita ergo stabit regula trium euersa.*

Messores.	Dies.	Messores		Dies.
12.	9.	30?	fiunt	$3\frac{3}{5}$.

Atque diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. messores 20. iugera. Quare ita rursum stabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.		Dies.
20	$3\frac{3}{5}$.	45?	fiunt.	$8\frac{1}{10}$.
				11.

11. *ROMAE aureus ducatus æstimatur Iulijs* $11\frac{1}{2}$ *hoc est, baiochis* 115. *Quot ergo eiusmodi ducatos recipiam pro* 1000. *aureis, quorum singuli* 10. *Iulijs, siue* 100. *baiochis æstimantur? Vel si* 20. *ducati constituant* 23. *aureos, quot aureos efficient* 1000. *ducati? Vtrumque exemplum sic stabit, reductis prius* 1000. *aureis ad baiochos* 100000. Quæst. 11.

Baioc.	Duc.	Baioc.	Duc.
115.	1.	100000? *fiunt*	$869\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.

Aur.	Duc.	Aur.	Duc.
23.	20.	1000? *fiunt*	$869\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.

12. *QVOT aureos reddent ducati* 4000. *si* 1. *aureus contineat* 100. *baiochos, at* 1. *ducatus* 115. *baiochos? vel si* 20. *ducati æstimentur* 23. *aureis, quot aureos continebunt ducati* 4000? *Reductis* 4000. *ducatis ad baiochos* 460000. *sic stabit vtrumque exemplum.* Quæst. 12.

Baioc.	Aur.	Baioc.	Aur.
100.	1.	460000? *fiunt*	4600.

Duc.	Aur.	Duc.	Aur.
20.	23.	4000? *fiunt*	4600.

13. *MERCATOR quidam emit* 300. *libras cuiſdam mercis aureis* 60. *scire autem cupit, quantum pro* 100. *aureis lucraturus sit, si* Quæst. 13.

easdem 300. libras vendat 64. aureis? Vel quantum pro 100. aureis perditurus sit, si 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifestum est, eũ pro 60. aureis esse lucraturum 4. aureos, vel perditurum 3. aureos: vt patet, si minus pretium à maiori subducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrãtur 4. aur. vel perdunt 3. aur. quantũ lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.	*Lucr. aur.*	*Aur.*	*Lucr. aur.*
60.	4.	100? *fiunt*	$6\frac{2}{3}$.

Aur.	*Damnum aur.*	*Aur.*	*Damnum aur.*
60.	3.	100? *fiunt*	5.

Quæst. 14. 14. *QVAERIT apud se mercator quidã, quanti emendæ sint libræ 100. alicuius mercis, vt eædem postea venditæ 64. aureis lucrum dent aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aur? Perspicuũ est, eũ, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorũ, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur. proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum simul, ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100.*

Pretium, & lucr.	*Aur.*	*Pretium, & lucr.*	*Aur.*
$106\frac{2}{3}$.	100.	64? *fiunt*	60.

Emendæ ergo sunt 100. libræ aureis 60. Nam di-

uendi-

uendita postea 64. aureis dant lucrum 4. aureorum, at pro 100. dabunt lucrum 6$\frac{2}{3}$. aur.

15. EMPTA *est gemma quędam, quæ si vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo constitit gemma illa? Hic etiam clarum est, eum, qui perdit 10. pro 100. facere 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur?* Quæst. 15.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	200?	*fiunt*	222$\frac{2}{9}$.

Constitit ergo gemma illa 222$\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex 222$\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Inuenies enim fieri 90. aureos, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
222$\frac{2}{9}$.	200.	100?	*fiunt*	90.

vel dic. Si pro 222$\frac{2}{9}$. aur. amitto 22$\frac{2}{9}$. aur. (Nam si gemma illa empta sit 222.$\frac{2}{9}$. aur. vendatur autem 200. aureis, liquido constat, damnũ fieri 22$\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
222$\frac{2}{9}$.	22$\frac{2}{9}$.	100.	*fiunt*	10.

16. EMIT *quidam 1000. vlnas panni certo* Quæst. 16.

to pretio, quas si 3. aureis minoris emisset, & vendidisset postea 3600. aureis, lucratus fuisset 10. pro 100. aureis: quanti ergo 1000. illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110. fiũt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	*Aur.*	*Aur.*		*Aur.*
110.	100.	3600?	*fiunt*	$3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluisset tantum lucrari 10. pro 100. constitissent illę 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. *Nam si* $3272\frac{8}{11}$. *aur. dant 3600. aureos, aurei 100. dabunt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.*

Aur.	*Aur.*	*Aur.*		*Aur.*
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100?	*fiunt*	110.

Vel si $3272.\frac{8}{11}$. *aur. lucrantur* $327\frac{3}{11}$. *aur. (Qui enim emit quippiam* $3272\frac{8}{11}$. *aureis, postea autem vendit aureis 3600. lucratur necessario* $327\frac{3}{11}$. *aur) 100. aur. lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.*

Aur.	*Lucr. aur.*	*Aur.*		*Lucr. aur.*
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100?	*fiunt*	10.

Sed quoniam in quæstione additum est, eum lucraturum fuisse 10. aur. pro 100. si 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emisset, vendidissetq́; 3600.

aureis; liquido constat, eum 3. aureos expendisse vltra $3272\frac{8}{11}$. *aureos. Quare* 1000. *constiterunt* $3275\frac{8}{11}$. *aur.*

17. *EMIT quidam* 1000. *vlnas panni certo pretio, quæ si* 6. *aur. pluris constitissent, & venditæ postea fuissent* 3600. *aureis, perditi fuissent* 10. *aurei pro* 100. *quantum ergo fuit pretium illarum* 1000. *vlnarum? Quoniam qui perdit* 10. *pro* 100. *facit* 90. *ex* 100. *Dic ergo. Si* 90. *fiunt ex* 100. *ex quo fient* 3600? Quæst. 17.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	3600?	*fiunt*	4000.

Si igitur perdidisset tantum 10. *pro* 100. *constitissent* 1000. *vlnæ* 4000. *aureis. Nam si* 4000. *aur. dant* 3600. *aur. dabunt* 100. *aurei aureos* 90. *vt patet. Vel si* 4000. *aur. pendunt* 400. *aur. (Qui enim emit rem aliquam* 4000. *aureis, eandē autē vendit* 3600. *perdit omnino* 400. *aur.)* 100. *aurei perdent* 10. *aureos, vt hic vides.*

Aur.	Damn aur.	Aur.		Damn. aur.
4000.	400.	100?	*fiunt*	10.

Quia vero additum est in quæstione, eum perditurum fuisse 10. *pro* 100. *si* 1000. *vlnas* 6. *aureis pluris emisset, easq; vendidisset postea* 3600. *aureis; liquet, eum* 6. *aureos minus expendisse, q̄* 4000. *Quare* 1000. *vlnæ constiterunt* 3994. *aur.*

18. *QVI singulas libras mercis alicuius* Quæst. 18.

ven-

vendit 20.baiochis, lucratur 30.pro 100.quantū ergo lucrabitur, si vendat maiori pretio, nempe 24. baiochis? Hic primum inuestigare oportet, quanti constat vna libra, vt vendita 20.baiochis, det lucrum 30. pro 100. vt in quæstione 14. docuimus, hoc modo. Si 130(pretium nimirum 100. & lucrum 30) proueniunt ex 100. vt pretio; ex quo prouenient 20.baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrum simul, ignotum etiam, quod reddat 30.pro 100?

130. 100. 20? *fiunt* $15\frac{5}{13}$.

Constabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$*.baiochis. Ita enim fiet, vt cum baiochi* $15\frac{5}{13}$. *(vna libra vendita 20.baiochis) lucrentur baiochos* $4\frac{8}{13}$. *lucrifiant ex baiochis 100. baiochi 30.vt hic vides.*

$15\frac{5}{13}$. $4\frac{8}{13}$. 100? *fiunt* 30.

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{13}$*.baioc. perspicuum est, si vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis* $15\frac{5}{13}$. *lucrifieri baiochos* $8\frac{8}{13}$. *Quare ex 100.baioch. lucrifient 56. baiochi, vt hic vides.*

$15\frac{5}{13}$. $8\frac{8}{13}$. 100? *fiunt* 56.

Quæst. 19. 19. *QVI 100. libras mercis alicuius vendit 10.aur. perdit 10.pro 100.quantum ergo pro 100. perdet, si eas vendat minori pretio, nempe 8.*

pe 8.aureis? Hic etiam primum inuestigare oportet, quanti constent 100. *illæ libræ, vt vēditæ* 10. *aureis damnum inferant* 10. *aureorum pro* 100. *vt in quæstione* 15. *docuimus, hoc modo. Si* 90. *fiunt ex* 100. *(qui enim perdit* 10. *pro* 100. *facit* 90. *ex* 100.*) ex quo numero fient* 10?

90. 100. 10? *fiunt* $11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo sunt illæ 100. *libræ aureis* $11\frac{1}{9}$. *Ita enim fiet, vt cum aurei* $11\frac{1}{9}$. *(venditis* 100. *illis libris* 10. *aureis) perdant aur.* $1\frac{1}{9}$, *perdantur* 10. *pro* 100. *vt hic cernis.*

$11\frac{1}{9}$. $1\frac{1}{9}$ 100? *fiunt* 10.

Inuento autem pretio 100. *illarum librarū* $11\frac{1}{9}$. *aur. manifestum est, si eædem* 100. *libræ vendātur* 8. *aureis, ex* $11\frac{1}{9}$. *aur. amitti aureos* $3\frac{1}{9}$. *Quā ob rem pro* 100. *perdentur* 28. *vt hic vides.*

$11\frac{1}{9}$ $3\frac{1}{9}$. 100? *fiunt* 28.

20. *MERCATOR quidā in Lusitania emit* 50000. *lib. piperis, aur.* 10000. *& ibidē pro vectigali soluit aureos* 500. *Naulū autē illinc in Italiā constitit* 300. *aureis, & in portu aliud vectigal exactū est* 200. *aur. Vectura deinde à mari Florentiā vsq; constitit* 100. *aur. ibiq; aliud vectigal persolutum* 100. *aur. Ministris deniq; ad eam negotiationem missis pro mercede, & victu dati* Quæst. 20.

sunt

ſunt 1000. *aurei* . *verum hæſitat, quanti vendendæ ſit libra, vt ſupra omnes impenſas de ſingulis libris lucretur* 2. *Iulios* . *Hic omnes impenſas primum in vnam ſummam colligere oportet, vt habeatur pretium, quod cum omnibus illis impenſis pro* 50000. *libris expoſitum eſt* . *Summa autem hæc in exemplo dato cōplectitur* 12200.

	Aurei.
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Miniſtri.	1000.
	12200.

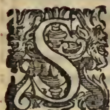
aur . *Quare ſi* 50000. *lib. conſtant* 12200. *aureis, ſiue* 122000. *Iulijs, vna libra conſtabit* $2\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Iul. vt hic vides.*

Lib.	Iul.	Lib.	Iul.
50000.	122000.	1? *fiunt*	$2\frac{1}{2}\frac{1}{5}$.

Igitur ſi ſingulas libras vendat $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Iul. lucrabitur de ſingulis libris Iulios* 2.

REGVLA SOCIETATVM.

Cap. XX.



SEQVITVR societatum regula immensum vsum apud mercatores habens, quæ quidem tota nititur regula trium, vt ex propositis exemplis fiet perspicuũ. Adhibetur autem, quando plures consortium ineunt, ita vt singuli summam quandam pecuniæ conferant, fitq; hoc modo. Pecuniæ omnium in vnam summam colliguntur, & numerus collectus primo loco in regula trium statuitur: Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omnium pecunijs prouenit: Tertium denique locum tenent pecuniæ singulorum, &c. ita vt toties adhibẽda sit regula trium, quot sunt illi, qui societatem inierunt. Quando autem interuenit temporum diuersitas, multiplicanda erit cuiusque pecunia per suum tempus, antequam omnium pecuniæ in vnam summã colligantur. Deinde hi numeri producti colligendi in vnã summam, vt habeãtur primus numerus in regula trium. Tertium autem locum occupabunt singuli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiusque in suum tempus, collocato rursus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifestum erit, quorum primũ hoc sit.

Regula societatũ, quã adhibetur, & quo pacto fiat.

Quoties regula trium adhibenda sit in regula societatum.

Quã est diuersitas tẽporũ in regula societatũ, quid agendum.

1. QVA

Quæstio 1. 1. *QVATVOR mercatores, inito consortio, lucrati sunt in nundinis quibusdam 6000. aur. Primus autem illorum contulit tantum 60. aur. secundus 100. tertius 120. & quartus 200. In quæstionem iam vocatur, quid quisque ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam exposuit. Ante omnia colligēda est summa ex omnium pecunijs, quæ est 480. aur. Deinde quater instituenda est regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ est pecunia ex omnium pecunijs collecta) lucrati sunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos singuli posuerunt? veluti hic apparet.*

Aur. Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
480. 6000.	60?	sunt	750. Primi.
	100?		1250. Secūdi.
	120?		1500. Tertij.
	200?		2500. Quarti.
			6000.

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. secundum 1250. tertium 1500. & quartum 2500.

EXAMEN huius rei erit, si lucra omniū in vnam summam collecta efficiant lucrū totum, vt in proposito exemplo factum esse vides.

Quæstio 2. 2. *TRES mercatores, emptis mercibus nauē onerarunt. Primi merces constiterunt 300. aur. secundi 500, tertij 180. Graui deinde tempestate*

pestate orta, proiectæ sunt in mare merces grauiores, quæ constabant 400. aur. Conuenit autem inter eos, vt iactura hæc communis sit. Quantum ergo quisq; damnum feret pro rata suarum merciũ portione? Colligantur in vnam summam aurei omnium, & numerus collectus 980. in primo loco regulę triũ collocetur, damnũ vero commune in secũdo, & pecuniæ singulorũ in tertio, vt hic vides.

Aur.	*Dãn.aur.*	*Aur.*		*Damn.aur.*	
980.	400.	300?	*fiũt*	$122\frac{4}{9}\frac{4}{8}\frac{0}{0}$.	*pri.*
		500?		$204\frac{}{9}\frac{8}{8}\frac{0}{0}$.	*secũ.*
		180?		$73\frac{4}{9}\frac{6}{2}\frac{0}{0}$.	*tertij*

Primus ergo perdet $122\frac{4}{9}\frac{4}{8}\frac{0}{0}$. *aur. secundus* $204\frac{}{9}\frac{8}{8}\frac{0}{0}$. *& tertius* $73\frac{4}{9}\frac{6}{8}\frac{0}{0}$.

3. *TRES emere volunt* 4000. *libræ sacchari, quæ æstimantur* 500. *aur. Primus tamen vult* 1300. *lib. secundus* 1460. *tertius denique reliquas lib.* 1240. *quantum ergo soluet quilibet? Dic, si* 4000. *lib. valent* 500. *aur. quid valent* 1300. *quid* 1460. *& quid* 1240. *lib. quas singuli capere volunt? Inuenies enim primũ soluere aur.* $162\frac{1}{2}$. *scđm* $182\frac{1}{2}$. *& tertiũ* 155. *vt hic vides.* Quęstio 3.

Lib.	*Aur.*	*Lib.*		*Aur.*	
4000.	500.	1300?	*fiunt*	$162\frac{1}{2}$.	*primi.*
		1460?		$182\frac{1}{2}$.	*secũdi.*
		1240?		155.	*tertij.*

4. *TRES societate inita, lucrati sunt* 1000. Quęstio 4.

M *aur.*

aur. Primus expoſuit 200. aur. eoſq́; poſt 8. menſes repetijt. Secundus contulit 450. aur. eoſq́; poſt 6. menſes recepit. Tertius denique 500. aur. attulit, eoſque in negotiatione reliquit 10 menſibus. Quantum ergo quiſque ex lucro accipiet, habita ratiõne ſuæ pecuniæ, & temporis? Cuiuſq; pecunia per ſuum tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam ſummam colligantur, pro primo numero regulæ trium: ſecundum vero locum occupet lucrum: tertium denique tres illi producti. In noſtro exemplo, ex pecunia primi in ſuum tempus fiunt 1600. ex pecunia ſecundi in ſuum tẽpus, 2700. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 5000. horum autẽ productorum ſumma eſt 9300. Sic ergo ſtabit exemplum.

Lucr. aur.			Luc. aur.
9300. 1000.	1600.	fiunt	$172 \frac{4}{9} \frac{}{3}$. Primi
	2700.		$290 \frac{3}{9} \frac{0}{3}$. Secũ.
	5000.		$537 \frac{5}{9} \frac{9}{3}$. Tertij

Queſtio 5. 5. *TRES, ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes. Secundus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. ſecundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum poſteriorum pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præcedenti quæſtione dictũ eſt, pecunia cuiuſque in ſuum tempus multiplicanda eſt; multiplicabimus pecuniam primi per ſuum tempus, faciemuſq́; 3000. atque ex hoc producto*

pro-

prouenit lucrũ primi. Vt igitur sciamus, ex quibusnam productis lucra posteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500.aur. (quod est lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 200. aur. quæ sunt lucra posteriorum? veluti hic apparet.

Lucr. aur.	Lucr. aur.			
500.	3000.	300?	fiunt	1800. Secundi
		200?		1200. Tertij.

Secundi ergo tempus per suam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare si 1800. diuidamus per 700. hoc est, per pecuniã secundi, inueniemus menses $2\frac{4}{7}$. quibus à secundo expositi sunt ad lucrum 700. aurei. Item si 1200. partiamur per 800. id est, per pecuniã tertij, reperiemus menses $1\frac{1}{2}$. pro tertio.

HOC ita esse experieris, si ita consortium proponas. Tres, inito consortio, lucrati sunt 1000. aur. Primus posuit 300. aur. per 10. menses: secũdus 700. aur. per menses $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per $1\frac{1}{2}$. mens. Quantum ergo quisque pro rata pecuniæ suę, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiusque pecunia per suũ tempus multiplicetur, faciemus ex pecunia primi in suũ tempus, 3000. ex pecunia secundi in suũ tempus, 1800. ex pecunia tertij in suum tempus, 1200. Hi autem tres producti faciunt summam 6000. Sic ergo stabit exemplum.

	Lucr. aur.			Lucr. aur.
6000.	1000.	3000. 1800. 1200.	ſunt	500. primi. 300. ſecundi. 200. tertij.

Vbi vides prodiiſſe lucra ſingulorum, ſicut in quæſtione proponebantur. Recte ergo tempora duorũ poſteriorum explorata ſunt.

Quæſtio 6. 6. QVATVOR ſocietatem inierunt biennio duraturam, lucratiq; ſunt 10000. aur. Primus in initio ſocietatis attulit 3000. aur. & poſt menſem octauum tranſactũ abſtulit ex illis 1000. aureos. Viceſimo deinde menſe inchoãte expoſuit rurſum 1200. aur. Secundus à principio dedit 2400. aur. & poſt 6. menſes elapſos abſtulit 800. aur. ſed ad initiũ menſis 16. denuo protulit 1400. aur. Tertius ſub initiũ conſortij exhibuit 2000. aur. tranſactiſq; 7. menſibus, totam pecuniã ſuam repetijt: ſed menſe 18. incipiente, iterum poſuit 1600. aur. Quartus denique, inchoante 7. menſe expoſuit 1800. aur. & poſt 4. menſes finitos recepit 900. aur. ſed ad initiũ mẽſis 17. rurſus cõtulit 1500. aur. Quantũ ergo quilibet ex cõi lucro pro ratione ſuæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandum eſt, quantam quiſq; pecuniam, & quanto tempore expoſuerit, vt ſemper pecuniam per tempus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propoſitum ita explicabimus.

QVONIAM primus in principio conſortij dedit 3000. aur. recepitq; 1000. poſt 8. menſes

exa-

exactos, manifestũ est, eũ in communi negotiatione exposuisse 3000. aur. per 8. mẽses. Multiplicãtes ergo 3000. per 8. faciemus 24000. Et quia post 8. menses elapsos abstulit 1000. aur. certũ est remansisse in communi consortio 2000. aur. vsq; ad finem 19. mensis, vbi nouam pecuniã contulit. Auferentes igitur 8. menses ex 19. remanent 11. menses, quibus exposuit tantũ 2000. aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Post hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. mensis vsq; ad finem secundi anni, liquet, si addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in cõmuni negotiatione per 5. reliquos menses duorum annorum, habuisse 3200. aur. Multiplicantes ergo 3200. per 5. faciemus 16000. Colligentes iam tres hosce productos 24000. 22000. 16000. in vnam summam, efficiemus 62000. qui numerus erit positio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipsius.

RVRSVS, *quoniam secundus per 6. mẽses imposuit 2400. aur. propterea quòd elapso 6. mẽse, abstulit 800. aur. multiplicabimus 2400. per 6. faciemusq; 14400. Quia vero ad principium 16. mensis nouam pecuniam dicitur exhibuisse, perspicuum est, eum per 9. menses à principio 7. mensis vsque ad finem 15. habuisse in consortio cõi 1600. aur. qui relinquuntur, subtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus similiter 14400. Deinde, quia dicitur ad initium 16. mensis iterum posuisse 1400. aur. manifestum est, hanc pecuniam expositam esse per reli-*

quos 9.menses duorũ annorũ, quibus si addantur aurei 1600. qui adhuc in communi negotiatione exponuntur, fient aurei 3000. qui per 9. illos vltimos menses in communi vsu fuerũt. Multiplicantes ergo 3000. per 9. faciemus 27000. Collectis autem tribus hisce productis 14400. 14400. 27000. in vnam summam, efficiemus 55800. pro numero secundi producto ex pecunijs, & temporibus ipsius.

POST hæc, cum tertius per 7. menses contulerit 2000. aur. quòd eos repetierit post 7. mẽses elapsos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusq́; 14000. Sed quia ad principium 18. mensis denuo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menses ex duobus annis supersunt) faciemusq́; 11200. Collectis autem duobus hisce productis 14000. 11200. in vnã summam, procreabimus 25200. numerũ ex pecunijs, ac temporibus tertij mercatoris productum.

QVIA tandem quartus a principio 7. mensis per 4. menses posuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. per 4. efficiemusq́; 7200. Sed quia, finitis 4. mensibus, recepit 900. aur. relicti sunt 900. aurei, qui fuerũt in negotiatione per 6. menses à principio 11. mensis vsq; ad finem 16. mensis, quando nouam pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900. per 6. faciemus 5400. Quoniam vero sub principium 17. mensis posuit iterũ 1500. aur. vsq; ad finem duorum annorũ, additis 900. aur. qui adhuc in communi vsu sunt, fient 2400. Multiplicãtes ergo 2400. per 8. menses residuos,

facie-

faciemus 19200. *Collectis autẽ tribus hisce productis* 7200.5400.19200. *in vnam summam, efficiemus* 31800. *pro numero ex pecunijs, temporibusq́, quarti mercatoris procreato.*

IAM *vero colligentes hos quatuor numeros* 62000.55800.25200.31800. *qui ex singulorum pecunijs, ac temporibus producti sunt, in vnam summam faciemus* 174800. *pro primo numero regulæ triũ. In secundo autem loco erit lucrũ commune, & in tertio numerus ex pecunijs, & temporibus cuiusq; procreatus, vt in* 4. *quæstione dictum est. Ita ergo stabit exemplum.*

174800. 10000. { 62000? 55800? 25200? 31800? }

fiunt { $3546\frac{1}{1}\frac{5}{7}\frac{6}{4}\frac{2}{8}$. *primi.* $3192\frac{}{1}\frac{3}{7}\frac{8}{4}\frac{4}{8}$. *secundi.* $1441\frac{1}{1}\frac{1}{7}\frac{3}{4}\frac{2}{8}$. *tertij.* $1819\frac{}{1}\frac{3}{7}\frac{8}{4}\frac{8}{8}$. *quarti.* }

7. TRES *ineunt societatem. Primus confert* 400. *aur. Secundus* 300. *aur. &* 86. *baioc. Tertius* 1000. *aur. Iul.* 7. *baioc.* 9. *In ipsa autem negotiatione vsi sunt fortuna aduersa, iacturamque fecerunt de tota summa* 100. *aureorũ. Quantum ergo est cuiuslibet damnum? Reductis omni-* Quæstio 7.

bus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi: pro secundo 30086. pro tertio vero 100079. quorum omnium summa est 170165. Ita ergo stabit exemplum.

	Baioc.		Damn. baioc
Si	170165.	*dant*	10000.

	Baioc.		Damn. baioc.
Quid	40000?	*fiũt*	$2350\frac{112250}{170165}$.
	30086?		$1768\frac{8280}{170165}$.
	100079?		$5881\frac{49635}{170165}$.

Quæstio 8. 8. *TRES Societatem inierunt. Primus attulit 200. aur. eosq́; in societate reliquit 12. mensibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt post decẽ menses elapsos. Lucrum acquisitum fuit 138. aureorũ. Facta autem debita distributione, primus habuit 60. aur. secundus 48. & tertius 30. Quot ergo mensibus reliquit secundus pecuniam collatam in consortio, & quanti torques aureus æstimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quoniam pecunia cuiusque per suum tempus multiplicari debet, multiplicabimus 200. aur. primi per 12. menses, faciemusq́; 2400. atq; ex hoc numero illi prouenerũt 60. aur. Dic ergo, vt scias, ex quo secundus lucrum 48. aureorum acquisierit: Si 60. aur. prouenerunt ex 2400. ex quo prouenerunt aurei 48? vt hic vides.*

60.	2400.	48?	*fiunt*	1920.

Inue-

Inueniesq, 1920. qui numerus productus est ex 240.aur.secundi in suum tempus. Diuiso igitur numero dicto 1920. per 240. prodibunt menses 8. quibus pecunia secundi in negotiatione mansit. Rursus, vt scias, ex quo tertius lucrũ 30.aureorum adeptus sit, dic. Si lucrum primi 60. aur. prouenit ex 2400. ex quo oritur lucrũ tertij 30. aur? Vel si lucrum secundi 48. aur. ortum est ex 1920. ex quo proueniet lucrum tertij 30.aur? vt hic cernis.

60.	2400.	30?	*fiunt*	1200.
48.	1920.	30?	*fiunt*	1200.

Semper enim inuenies numerum 1200. qui productus est ex 10.mensibus tertij in suam pecuniam, hoc est, in pretium torquis. Diuiso ergo hoc numero 1200. per 10. menses, prodibit valor torquis aureorum 120. quos tertius ad negotiationem per 10.menses attulit.

REM ita se habere, cognosces, si ita proponas sodalitatem. Tres, cõsortio inito, lucrati sunt 138. aur. Primus contulit 200.aur. per 12. menses: secundus 240.aur. per 8. menses: & tertius 120.aur. per 10.menses. Quantum ergo cuilibet de lucro debetur? Multiplicata enim pecunia cuiusque per suum tempus, inuenies lucra singulorum, quemadmodum in quæstione dictum est, vt hic apparet.

Lucr.

	Lucr.aur.				*Lucr.aur.*
5520.	138.	2400?	1920?	*fiunt*	60. *primi.*
		1920?			48. *secundi.*
		1200?			30. *tertij.*

Quæstio 9. 9. *TRES, inito consortio per annum duraturo, lucrati sunt summam quandam aureorum. Primus exposuit statim ab initio* 1000.*aur.secundus vero aureos, nescio quot, contulit post* 2.*menses exactos: Tertius demũ post* 4.*menses à secundo contribuit etiam multitudinem aureorũ mihi ignotam. Finita tamen societate, lucrum participarunt æqualiter. Quid ergo secundus & tertius in eam societatem contulerunt? Multiplicando* 1000.*aur.primi per* 12.*menses quibus eos in sodalitate reliquit, fient* 12000. *Ac tantundem debet fieri ex pecunia secundi in suum tempus, atq; ex pecunia tertij in suum tempus; quandoquidem æqualia lucra habere debent. Quoniam vero secundus pecuniam suam* 10.*mensibus reliquit in negotiatione, si partiamur* 12000. *per* 10. *inueniemus pecuniam secundi fuisse* 1200.*aur.at si diuidamus per* 6. *menses, quibus tertius suam pecuniam exposuit, deprehendemus pecuniam tertij fuisse* 2000.*aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiusq; in suũ tempus producetur numerus* 12000. *qui tertium locum in regula trium occupabit; ac proinde æqualia lucra omnes tres habebũt, quodcunq; fuerit lucrum illud commune. Si enim lucrũ commune fuisset* 900. *aur. & tres hi numeri* 12000. 12000. 12000. *qui ex singulorum pecu-*

nijs

nijs in sua tempora sunt producti, in vnam summam colligerentur, ita staret exemplum.

36000.	900.	12000. 12000. 12000.	sunt	300. 300. 300.

10. TRES in communi negotiatione lucrati sunt 190. aur. quos ita distribuerunt, vt portio primi tripla esset portionis secundi, & quadrupla portionis tertij. Primus autem contulit per 12. menses 80. aur. Secundus suam pecuniam exposuit per 8. menses, & tertius per 4. Quantum ergo quisq; duorum posteriorum contulit in hanc societatem, & quid de lucro singuli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per suum tempus, vt per 12. menses; faciesq; 960. Huius numeri sume $\frac{1}{3}$. nimirum 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atque hi numeri sunt, qui produci debent ex pecunijs duorum posteriorũ in sua tempora: quia hac ratione lucrum secundi erit $\frac{1}{3}$. lucri primi, & lucrũ tertij erit $\frac{1}{4}$. eiusdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum secundi oritur, est $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrum tertij, est $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menses secũdi, inueniemus 40. aur. quos secũdus posuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menses tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ singulorum per sua tempora multiplicatæ producunt numeros 960. Quæst. 10.

320.

320.240. *quorum primus triplus est secundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra easdem quoque proportiones habitura. Vt hic vides.*

1520. 190. (960? 320? 240?) *fiunt* (120. 40. 30.) *Lucra.*

Quæst. 11. 11. T R E S, *inito consortio, contulerunt in communem negotiationem* 1520. *aur. lucratique sunt aur.* 190.*quos (habita rōne pecuniæ cuiusq; quam posuit) ita partiti inter se sunt, vt primus haberet* 120. *secundus* 40. *Quid ergo tertius habuit, & quid quisq; in societatem contulerunt? Si lucrum tam primi, quàm secūdi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij* 30. *aur. Cognitis autem singulorum lucris, dic. Si totum lucrum* 190. *aur. ortum est ex communi pecunia* 1520. *aur. ex quo prouenit lucrum primi* 120. *aur. & lucrum secundi* 40.*aur. & lucrum tertij* 30.*aur. Reperies enim primum attulisse* 960. *aur. secundum* 320.*& tertium* 240.*Vt hic vides.*

190. 1520. (120? 40? 30?) *fiunt* (960. *primi.* 320.*secundi.* 240. *tertij.*)

Examinabitur, si dicas. Si 1520. *(quæ est summa pecuniarum, quas singuli contulerunt) lucrantur* 190. *quid lucrabuntur* 960. 320. *&* 240. *Inuenies enim lucra* 120, 40, *&* 30.

12.

12. *TRES, inita sodalitate, in negotiationẽ contulerunt* 1520. *aur. quibus lucrati sunt* 190. *aur. Primus, facta distributione, recepit* 1080. *aur. conflatos ex sua pecunia, quã posuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter secundus accepit* 360. *aur. & tertius* 270. *Quantũ ergo quisq; posuit, & quantum est lucratus? Facta vna summa ex pecunia, quam omnes posuerunt, & lucro communi, quæ est* 1710. *Dic. Si* 1710. *pecunia omniũ, & lucrum, proueniũt ex* 1520. *pecunia omniũ, ex quo proueniunt* 1080. *qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum? & ex quo orientur* 360. *quæ continent & pecuniã, & lucrũ secũdi? & ex quo numerus* 270. *producetur continens & pecuniã, & lucrũ tertij? Inuenies enim hoc modo pecunias, quas singuli posuerunt. vt hic maifestum est.* Quæst. 12.

1710.	1520.	1080?	*fiunt*	960. *primi.*
		360?		320. *secundi.*
		270?		240. *tertij.*

Ablata autem pecunia cuiusq; ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum solum. Ita deprehendes, lucrum primi esse aur. 120. *secundi* 40. *& tertij* 30.

13. *DVO in communi consortio lucrati sunt* 200. *aur. ex quibus primo obtigerunt* 50. *aur. secundus tamen duplo plus contulit, quàm primus, et præterea* 8. *aur. Quantũ ergo vterq; exposuit? Quoniam primus lucratus est* 50. *aur. manifestum est, secundum, qui duplo plus posuit, lucratum* Quæst. 13.

esse

esse 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200.aur.supersunt, esse lucrū 8. aureorum, quos præterea secundus attulit. Vt ergo habeas pecuniam, quam vterq; posuit, dic. Si 50. aurei residui proueniunt ex 8.aur. quos secundus præterea cōtribuit, ex quo producentur 50. aur. quos primus lucratus est, & ex quo 100.aur. quos lucratus est secūdus? Reperies eñ hac rõne primū posuisse 8.aureos, & secundū 16. vt hic apparet.

50. 8. { 50? / 100? } *fiunt* { 8. / 16.

Si igitur addas 8.ad 16.aur. secundi, facies 24. aur. quos secundus in eam sodalitatem contulit.

EXAMEN huius rei erit, si 8. aur. & 24. quos ambo contribuerunt, in vnam summam colligas, quæ est 32. & dicas. Si 32. lucrati sunt 200. quid lucrabuntur 8. & quid 24? Deprehendes enim lucrum primi esse 50. aur. & secundi 150. vt hic vides.

32. 200. { 8? / 24? } *fiunt* { 50. / 150.

Quæst. 14. 14. *DVO contraxerunt societatem, quorū primus exposuit 120.aur. & secundus 180. Assumpserunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000.aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterq; illorum? Dic. Si 100. dant 10.*

pro-

procuratori, quid dabunt 1000. *inueniesq;* 100. *aur. qui procuratori debentur in ratione* 10. *pro* 100. *Ablatis autem his* 100. *aur. ex toto lucro, hoc est, ex* 1000. *aur. remanent* 900. *aur. pro lucro amborum. Dic ergo. Si* 300. *aur. quos ambo posuerunt, lucrati sunt* 900. *aur. quid lucrabuntur aurei* 120. *& quid* 180. *Veluti hic appositum est.*

300.	900.	120? / 180?	*fiunt*	360. / 540.

15. *TRES inierunt societatem, lucratique sunt* 1520. *aur. Primus contulit* 1080. *aur. & secundus* 360. *tertius autem tantã pecuniã exposuit, vt ei de lucro cederent* 240. *aur. Quid ergo hic tertius posuit, & quid duorum priorum quisque est lucratus? Subtrahe* 240. *aur. quos tertius lucratus est, à toto lucro* 1520. *aureorum, vt reliqui sint* 1280. *aur. pro lucro priorum duorũ. Dic ergo. Si* 1440. *aur. quos primus & secũdus exposuerunt, lucrantur* 1280. *aur. quid lucrabuntur* 1080. *aur. primi, & quid* 360. *aur. secundi? Inueniesq; lucrum primi esse* 960. *& secundi* 320. *vt hic cernis.* Quæst. 15.

1440.	1280.	1080? / 360?	*fiunt*	960. / 320.

Ita enim omnium lucra conficient 1520. *aur. Vt autem habeas pecuniam à tertio expositam, dic.*

Si lu-

Si lucrum priorum duorum 1280. aur. prouenit ex 1440. aur. quos in societatem attulerunt, ex quo proueniet lucrum tertij 240. aur? inueniesq́, 270. aur. vt hic vides.

1280. 1440. 240? *fiunt* 270.

Quæst. 16. 16. TRES *exposuerunt æquales pecuniæ summas, lucratiq́ sunt 1000. aur. in vno anno. Primus reliquit suam pecuniam in consortio 7. mensibus: secundus suam repetijt post 6. menses: tertius autem suam vsq; ad finem anni exposuit. Quid ergo quisq; de lucro accipiet? Collectis omnibus mensibus, quibus singuli suas pecunias exposuerunt, vt fiat summa 25. dic. Si 25. lucrantur 1000. quid lucrabuntur 7. menses, & quid 6. & quid 12? quemadmodum hic factum est.*

25.	1000.	7?	*fiunt*	280.
		6?		240.
		12?		480.

Verum hoc esse perspicuum est, cũ omnium lucra efficiant 1000. aur. quos quidem dicebantur esse lucrati.

IDEM *tamen hoc modo examinabis. Finge singulos exposuisse 100. aur. quos per tempus cuiusq; multiplica, vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hisce numeris in vnam summam, quæ est 2500. dic. Si 2500. lucrantur 1000. quid lucrabuntur 700. 600. & 1200? Inuenies enim*

eadem

eadem lucra, quæ prius, vt hic apparet.

2500. 1000. { 700? 600? 1200? } *fiunt* { 280. 240. 480.

17. *QVATVOR simul lucrati sunt* 340. *aur. quos ita inter se, habita ratione pecuniarũ collatarũ, partiti sunt, vt quoties secũdus habuit* 5. *toties tertius habuerit* 9. *quoties autẽ tertius habuit* 7. *toties quartus habuerit* 11. *quoties denique quartus habuit* 9. *toties primus habuerit* 13. *Primus aũt cõtulit* 286. *aur. qd ergo alij tres exposuerũt, & qd singuli ex lucro reportarũt? Hic exprimũtur proportiones lucrorũ, atq; adeo pecuniarum, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecunijs expositis proportionalia. Quoniã igitur primus toties habiturus est* 13. *quoties quartus* 9. *erit proportio pecuniarum expositarum eadem, quæ* 13. *ad* 9. *propterea quòd idem numerus multiplicans* 13. *&* 9. *producit pecunias vtriusque, cũ toties in illa contineri debeant* 13. *quoties* 9. *in hac. Dic ergo. Si* 13. *dant* 286. *aur. quos primus posuit, quid dabunt* 9? *inuenies q;* 198. *aur. pro collatione quarti, vt hic cernis.* Quæst. 17.

13. 286. 9? *fiunt* 198.

vbi vides, toties contineri 9. *in* 198. *quoties* 13. *in* 286.

QVONIAM vero quartus dicitur habiturus

toties 11. quoties tertius 7. erit proportio 198. nempe pecuniæ quarti, ad pecuniam tertij, quæ 11. ad 7. Dic ergo. Si 11. dant 198. quid 7. reperiesque collationem tertij 126. aur. vt hic constat.

11. 198. 7? *fiunt* 126.

Vbi etiam liquet, toties contineri 7. in 126. quoties 11. in 198.

RVSVS quia tertius toties debet habere 9. quoties secundus 5. erit proportio 126. nimirum pecuniæ tertij, ad pecuniam secundi, quæ 9. ad 5. Dic ergo. Si 9. dant 126. quid 5? inueniesq́ collationem secundi 70. aur. vt hic patet.

9. 126. 5? *fiunt* 70.

vbi etiam apparet, toties reperiri 5. in 70. quoties 9. in 126.

HABITIS autem pecunijs, quas singuli contribuunt, inueniemus lucra eorum, sicuti in alijs societatibus. Collectis enim omniũ pecunijs in summã 680. dicemus. Si 680. lucrãtur 340. quid lucrabuntur 286. 70. 126. 198. quos primus, secũdus, tertius, ac quartus posuit? veluti hic vides.

680.	340.	286? 70? 126? 198?	*fiunt*	143. *primi.* 35. *secundi.* 63. *tertij.* 99. *quarti.*

vbi

vbi quidem liquido cernis, omnia lucra facere 340. & toties contineri 13. in 143. quoties 9. in 99. & toties 5. in 35. quoties 9. in 63. Itē toties 7. in 63. quoties 11. in 99.

18. *TRES partiri inter se volūt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties secundus habeat 7. & tertius 2. Quantum ergo singuli sunt accepturi? Iunge simul 10. 7. & 2. vt habeas 19. Deinde dic. Si 19. dant 760. quid dabunt 10. 7. & 2. veluti hic vides.* Quæst. 18.

19. 760. (10? 7? 2?) *fiunt* (400. *primi.* 280. *secundi.* 80. *tertij.*)

19. *QVATVOR partiri inter se volunt 785. aur. ea lege, vt quoties primus habet 10. toties secundus habeat 7. quoties autem secundus habet 14. toties tertius habeat 3. quoties deniq; tertius habet 12. toties quartus habeat 9. Quid ergo quisq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendum erit ab vltimo, nempe à quarto, qui ponatur habere semel 9. Habebit igitur tertius semel etiam 12. Quia vero quoties tertius habet 3 toties secundus habere debet 14. si diuidamus 12. numerū tertij, per 3. inueniemus Quotientem 4. qui indicabit in 12. quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14. per dictum Quotientem 4. vt inueniamus 56. numerum secundi, in quo toties 14. continentur; quoties 3. in 12. Et quoniam quoties secundus habet 7. toties primus* Quæst. 19.

habere debet 10. si partiamur 56. numerũ secundi, per 7. inueniemus Quotientem 8. qui indicat, in 56. octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10. per Quotientem hunc 8. vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10. continentur, quoties 7. in 56. Atq; ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorũ 80. 56. 12. 9. Ita enim toties primus habebit 10. quoties secundus 7. Et toties secundus 14. quoties tertius 3. Et quoties tertius 12. toties quartus 9. Collectis igitur illis numeris in vnam summã, quæ erit 157. Dic. Si 157. dant 785. quid dabũt 80. 56. 12. & 9? vt hic vides.

157.	785.	80? 56? 12? 9?	*fiunt*	400. *Primi.* 280. *Secũdi.* 60. *Tertij.* 45. *Quarti.*

ALIO modo ita soluetur eadem quæstio proposita. Quoniam cum primus habet 10. secũdus habet 7. Ponemus 10. pro primo, & 7. pro secundo. Deinde, quia cũ secundus habet 14. tertius habet 3. dicemus. Si 14. secũdi sunt 7. quid erunt 3. tertij? Inueniemusq́, $1\frac{1}{2}$. atq; talem proportionẽ habebit positio secundi ad positionem tertij, qualem 7. ad $1\frac{1}{2}$. hoc est, toties erunt 14. in 7. quoties 3. in $1\frac{1}{2}$. Rursus, quia cum tertius habet 12. quartus habet 9. dicemus. Si 12. tertij sunt $1\frac{1}{2}$. quid erunt 9. quarti? inueniemusq́, $1\frac{1}{8}$. atq; talem proportionem habebit positio tertij ad positionem

tionem quarti, qualem $1\frac{1}{2}$. *ad* $1\frac{1}{8}$. *hoc est, toties erunt* 12. *in* $1\frac{1}{2}$. *quoties* 9 *in* $1\frac{1}{8}$. *Collectis iam his numeris* 10. 7. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{8}$. *in vnam summam, efficiemus* $19\frac{5}{8}$. *Quare dicemus. Si* $19\frac{5}{8}$. *dant* 785. *quid dabunt* 10. 7. $1\frac{1}{2}$. *&* $1\frac{1}{8}$. *vt hic vides.*

$19\frac{5}{8}$.	785.	10?	*fiunt*	400. *primi.*
		7?		280. *secundi.*
		$1\frac{1}{2}$?		60. *tertij.*
		$1\frac{1}{8}$?		45. *quarti.*

20. *QVATVOR duces, sex signiferi, &* 100. *milites in direptione cuiusdam vrbis irruerunt in domũ quandam, vbi repererunt* 72400. *aur. quos inter se ita partiti sunt, vt quoties quilibet dux acceperit* 8. *toties quilibet signifer acceperit* 5: *& quilibet miles* 3. *Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerum ducum, id est,* 4. *per* 8. *nempe per numerum, quem toties quilibet dux debet habere, quoties alij* 5. *&* 3. *efficiesq́;* 32. *Similiter multiplica* 6. *numerum signiferorum per* 5. *&* 100. *numerũ militum per* 3. *efficiesq́;* 30. *&* 300. *Iunctis simul tribus his numeris* 32. 30. 300. *vt fiant* 362. *Dic. Si* 362: *dant* 72400. *quid dabunt* 32. 30. *&* 300? *vt hic vides.* Quæst. 20.

362.	72400.	32?	*fiunt*	6400.
		30?		6000.
		300?		60000.

Itaque quatuor duces acceperunt ex illa prædâ 6400. aur. at 6. signiferi 6000. & 100. milites 60000. qui omnes conficiunt summam aureorum inuentam. 72400. Iam vero, si partiamur aureos ducum 6400. per 4. numerum ducum, reperiemus quemlibet habuisse 1600. aur. Item si aureos signiferorũ diuidamus per 6. deprehendemus cuilibet obtigisse 1000. aur. Si denique aureos militũ per 100. distribuamus, inueniemus singulos accepisse 600. aur. vbi manifeste vides, toties 8. contineri in 1600. quoties 5. in 1000. & 3. in 600. nimirum ducenties.

Quæst. 21. 21. *QVIDAM extremum spiritũ agens, cui filia erat, & filius, qui in bello dicebatur occubuisse, ita hæreditatem 18088. aureorum distribuendam inter vxorem, & filiam reliquit, vt vxor haberet $\frac{2}{3}$. filia autem $\frac{1}{3}$. sed si forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$. haberet. Accidit autem, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuidenda est, vt voluntati testatoris satisfiat? Certum est, quæstionem hanc non posse intelligi, vt verba sonant. Nam si filius accipiat $\frac{2}{3}$. nõ poterit vxor habere $\frac{2}{3}$. & filia $\frac{1}{3}$. Quare omnes Arithmetici voluntatem testatoris interpretantur, vt voluerit, filium duplo plus debere habere, quàm vxorem, & vxorem, duplo plus, quàm filiam. Id quod proportio harum minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$. quæ dupla est, (continet enim minutia $\frac{2}{3}$. minutiam $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaque numerus 18088. secandus est in tres partes, ita vt prima contineat secundam bis, & secunda tertiam*

etiam

etiam bis, hoc est, quæ habeant continuam proportionem duplam. quod hoc modo fiet. Pone tertiam esse 1. Erit ergo secunda 2. & prima 4. quæ omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4. 2. & 1? vt hic vides,

7.	18088.	4? 2? 1?	*fiunt*	10336. *filij.* 5168. *vxoris.* 2584. *filiæ.*

22. TRES *crumenã inuenerunt cũ 3042. aur. quos ita inter se distribuerunt. Primus accepit* $\frac{1}{2}$. *secundus* $\frac{1}{3}$. *& tertius* $\frac{1}{4}$. *Quid ergo quisque accepit? Hic etiam perspicuum est, quæstionem non posse intelligi, vt sonat. Si namq; primus accepisset* $\frac{1}{2}$. *& secundus* $\frac{1}{3}$. *non potuisset tertius accipere* $\frac{1}{4}$. *Nam hæ tres minutiæ efficiunt plus, quàm integrum, nempe* $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$. *Quare sensus est, vt datus numerus distribuatur in tres partes, quæ easdem proportiones inter se habeãt, quas hæ minutiæ* $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. *Quod vt fiat inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus autẽ hic numerus est 12. inuentus per ea, quæ cap. 10. scripsimus. Ex hoc numero cape* $\frac{1}{2}$. *nempe 6. Item* $\frac{1}{3}$. *nempe 4. Item* $\frac{1}{4}$. *nempe 3. quas partes simul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dãt 3042. quid dabũt 6. 4. et 3? vt hic cernis.* Quæst. 22.

13.	3042.	6? 4? 3?	*fiunt*	1404. *primi.* 936. *secundi.* 702. *tertij.*

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandē denominationem, vt ad $\frac{6}{12}$. $\frac{4}{12}$. $\frac{3}{12}$. *Habebunt enim hæ minutiæ easdem proportiones, quas numeratores habent. Easdem autem habent tres numeri inuenti* 1404. 936. 702. *vt patet.*

Quæst. 23. 23. *TRES inuento loculo cum* 1407. *aur. ita distributionem fecerunt. Primus accepit* $\frac{1}{2}$. *secundus* $\frac{3}{5}$. *tertius* $\frac{8}{11}$. *quid ergo quisq; accepit? Hic etiā sensus est, vt datus numerus in tres partes secetur datis minutijs proportionales: aliàs impossibilis quæstio foret. Inuento igitur, ex cap.* 10. *minimo numero* 110. *dictas minutias cōtinente, sume eius dimidiū* 55. *& tres quintas* 66. *& octo vndecimas* 80. *easq; in vnam summam* 201. *collige, ac dic. Si* 201. *dant* 1407. *quid dabunt* 55. 66. *&* 80? *vt hic apparet.*

201. 1407.	55?		385.	*primi.*
	66?	*fiunt*	462.	*secundi.*
	80?		560.	*tertij.*

Examen fiet, vt in antecedēte quæstione. Reductis enim datis minutijs ad eandē denominationē, vt ad $\frac{55}{110}$. $\frac{66}{110}$. $\frac{80}{110}$. *habebunt tres numeri inuenti easdem proportiones; quas hæ minutiæ, nempe earum numeratores, habent, vt constat.*

Quæst. 24. 24. *QVATVOR partiri inter se volunt* 396. *aur. ita vt primus habeat* $\frac{1}{2}$. *& præterea* 10. *secūdus* $\frac{3}{5}$. *minus* 20. *tertius* $\frac{1}{3}$. *& præterea* 8. *quartus deniq;* $\frac{1}{4}$. *minus* 6. *quantū ergo quisq; accipiet? In huiusmodi quæstionibus aufer ex tota*

sum-

summa numeros, qui accipi debent vltra partes dictas, & alios, qui deesse debēt dictis partibus, ad eandē summā adijce. Vt hic aufer 10. *&* 8. *vt remaneant* 378. *adde rursus* 20. *&* 6. *fiūt* 404. *Deinde inuēto minimo numero* 60. *cōtinente datas minutias, cuius* $\frac{1}{2}$. *est* 30. *et* $\frac{3}{5}$. 36. *et* $\frac{1}{3}$. 20. *et* $\frac{1}{4}$ 15. *quæ oēs faciūt* 101. *Dic ergo. Si* 101. *dant* 404. (*qui numerus productus est ex additione & subtractione datorū numerorum ex tota summa* 396.) *quid dabūt* 30. 36. 20. *&* 15? *vt hic vides.*

101.	404.	30? 36? 20? 15?	*fiunt*	120. *primi.* 144. *secundi.* 80. *tertij.* 60. *quarti.*

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habent easdem, quas datæ minutiæ, sed in vnam summam collecti faciunt 404. *non autem* 396. *vt quæstio proponit. Quòd si primo addas* 10. *vt fiāt* 130. *& à secūdo auferas* 20. *vt relinquātur* 124. *tertio item adijcias* 8. *vt fiant* 88. *& à quarto demum auferas* 6. *vt remaneant* 54. *efficient hi quatuor numeri* 396. *Vt autem habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi sunt, & subtracti: Ita vt vere* 130. *ad* 124. *proportionem habeant, quam* $\frac{1}{2}$. *ad* $\frac{3}{5}$. *si prius* 10. *detrahātur ex illo, & huic adijciantur* 20. *vt recte dicatur numerus* 130. *continere* $\frac{1}{2}$. *& præterea* 10. *numerus vero* 124. *continere* $\frac{3}{5}$. *minus* 20. *&c.*

Quæſt.25. 25. *EST ciſterna habens in imo fundo tres fiſtulas inæquales: maxima reſerata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota aqua in 3. horis; minima deniq; aperta, effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore, reſeratis omnibus tribus fiſtulis, tota aqua effluet, ſi per ſingulas fiſtulas à principio vſq; ad finem aqua ſemper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæſtione expreſſa, nempe horæ 2.3. & 6. metiantur, qui hic eſt 6. dic. Si maxima fiſtula in 2. horis vnam ciſternam exhaurit, quot ciſternas in 6. horis exhauriet? inuenieſque 3. Item ſi media fiſtula vnã ciſternam exhaurit in 3. horis, quot ciſternas in 6. horis exhauriet? inuenieſq; 2. Item ſi minima fiſtula in 6. horis vnam ciſternam exhaurit, quot ciſternas exhauriet in 6. horis? inuenieſq; 1. vt hic vides.*

Horæ.	*Ciſterna.*	*Horæ*	*Ciſternæ.*
2. 3. 6.	1.	6?	3. 2. 1.

COLLECTIS iam in vnum his tribus inuentis numeris 3.2.1. vt fiant 6. dic. Si ſex ciſternæ euacuãtur in 6. horis, quanto tẽpore 1. euacuabitur? inuenieſq; in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Si maxima fiſtula exhaurit totam ciſternam in 2. horis, & media in 3. & minima in 6. quantam partem ciſternæ exhaurient ſingulæ fiſtulæ in 1. hora? veluti hic appoſitum eſt.

Horæ

Horæ.	Cisterna.	Hora.	Cisterna.
2. 3. 6.	1.	1?	$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fistulam euacuare $\frac{1}{2}$. ci sternæ, & mediam $\frac{1}{3}$. & minimam $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt vnam integram cisternam.

EADEM hæc quæstio ita proponi potest. Est cisterna habens in summitate tres fistulas inæquales: maxima replet cisternam in 2. horis, media in 3. & minima in 6. quanto ergo tempore omnes simul cisternam implebunt? Inuenies enim 1. horam.

PARI ratione ita potest proponi. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 2. annis, secũdus in 3. & tertius in 6. quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient. Inuenies enim 1. annum.

CAETERVM huiusmodi quæstiones solui etiam possunt hoc pacto. Inuestigetur per regulam trium, quantũ aquæ singulæ fistulæ exhauriant in 1. hora, tresq́; numeri inuenti in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa fuerit 1. requiritur 1. hora, vt omnes fistulæ totam cisternam euacuent: si vero non fuerit 1. inuenietur tempus requisitũ per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifestum. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 6. annis, secundus in 9. & tertius in 18. Quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient? Dic. Si primus in Alia solutio huius quæstionis.

6. an-

inuestigare oportet, quanta pars cisternæ (posita illa conditione) in 1. hora impleatur; quod hoc modo fiet: Si in 4. horis 1. cisterna impletur, quantũ implebitur in 1. hora? Inuenies autẽ $\frac{1}{4}$. cisternæ. Rursus. Si in 6. horis 1. cisterna exhauritur, quantũ euacuabitur in 1. hora? Inuenies autẽ $\frac{1}{6}$. cisternæ. Si ergo auferas $\frac{1}{6}$. ex $\frac{1}{4}$. remanebit $\frac{1}{12}$. cisternæ: ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{12}$. cisternæ requirit 1. horam, quid requiret 1. cisterna? Inueniesq́; 12. horas. Atq; in tot horis cisterna tota implebitur. Quod hac ratione examinabis verum esse. Si in 4. horis impletur 1. cisterna, in 12. horis quot cisternæ implebuntur? Inuenies autem 3. cisternas. Item si in 6. horis euacuatur 1. cisterna, in 12. horis quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies autem 2. cisternas, quas si auferas ex 3. inuentis, remanebit 1. cisterna plena.

QVOD si quis dicat: Cisterna per fistulã superiorẽ impletur in 3. horis, per inferiorẽ euacuatur in 8. hor. eodẽ modo soluetur q̃õ, si dicas. Si in 3. horis 1. cisterna impletur, quantũ implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{3}$. cisternæ. Item si in 8. horis vna cisterna euacuatur, quantũ euacuabitur in 1. hora? Inuenies autẽ $\frac{1}{8}$. cisternæ. Si ergo demas $\frac{1}{8}$. ex $\frac{1}{3}$. remanebũt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$. cisternæ requirunt 1. horã, quid requiret 1. cisterna? Inueniesq́; $4\frac{4}{5}$. hor. quo tẽpore tota cisterna implebitur; Quod ita ꝓbabis. Si in 3. hor. impletur 1. cisterna, in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ replebuntur?

Inue-

Inuenies autem $1\frac{3}{5}$. *Item si in* 8. *horis euacuatur vna cisterna, in* $4\frac{4}{5}$.*hor. quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies autem* $\frac{3}{5}$. *quas si ex* $1\frac{3}{5}$.*auferas, remanebit* 1.*cisterna plena.*

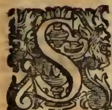
Alia solutio huius quæstionis.

BREVIVS *fortassis huiusmodi quæstiones soluentur, si quæratur, quanta portio cisternæ impleatur in illis horis, in quibus tota impleretur, si nihil efflueret. Quod ita fiet in priori quæstione. Dic. Si* 6.*horæ* 1.*cisternam euacuant, quantũ euacuabũt* 4.*horæ? inueniesq;* $\frac{2}{3}$.*quas si ex* 1. *auferas (ponimus enim* 1.*cisternam* 4.*horis impleri, si nihil efflueret) remanebit* $\frac{1}{3}$.*quæ* 4.*horis implebitur. Dic igitur rursus. Si* $\frac{1}{3}$. *cisternę requirit* 4.*horas, quid requiret* 1.*cisterna? Inueniesque* 12.*horas, vt prius.*

IN *posteriori vero quæstione dic. Si* 8. *horæ* 1.*cisternam exhauriũt, quantum exhaurient* 3. *horæ? inueniesq;* $\frac{3}{8}$. *quas si demas ex* 1. *(ponimus enim* 1.*cisternam* 3.*horis impleri, si nihil efflueret) remanebunt* $\frac{5}{8}$.*quę* 3.*horis implebũtur. Dic ergo rursus: Si* $\frac{5}{8}$. *cisternę exposcunt* 3. *horas, quid exposcet* 1.*cisterna? inueniesq;* $4\frac{4}{5}$. *horas, vt prius.*

REGVLA ALLIGATIONIS.

Cap. XXI.



SOLENT nonnũquam Arithmetici varias merces variorum pretiorum miſcere, ita vt, ſtatuto quodam pretio medio, omnes eo emantur; quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicũt, eo quòd variæ merces alligentur quodammodo ad vnum pretium, vt ex ſequentibus exemplis perſpicuum fiet. Regula alligationis quid.

1. *DVO genera vini ſunt: menſura 1. primi conſtat 20. baioch. at menſura 1. ſecũdi venditur 12. baioch.* Queſtio 1.

Quantũ ergo ex vtroque ſumendum eſt, vt menſura 1. valcat 15. baioch? Pone vnũ pretiũ ſub altero, et ad ſiniſtrã illorum colloca pretiũ ſtatutum, quod mediũ eſt inter data duo pretia. Deinde confer vtrũque pretium Regula alligationis quõ fiat.

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
		20.	3.
	15.		
		12.	5.
			8.
		Summa differentiarum.	

let aur. 24. Ut ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantum ex vtroque argento sumendũest? Facta alligatione, ut in præcedẽti quæstione, dic. Si summa differẽtiarũ 6. dat

	Pretia.	Differentiæ.
Pretium medium.	30.	4.
28.		
	24.	2.
		6.
		Summa differentiarum.

1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 2? vt hic vides.

6. 1. { 4? 2? } *fiunt* { $\frac{2}{3}$. *primi.* $\frac{1}{3}$. *secundi.* }

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroq; argento constantem 28. aureis. Ut examines, dic. Si 1. lib. argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt $\frac{2}{3}$. vnius libræ? Item si 1. lib. posterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$? vt hic apparet.

1.	30.	$\frac{2}{3}$?	*fiunt*	20.
1.	24.	$\frac{1}{3}$?	*fiunt*	8.

Atq; ita 1. lib. constabit 28. aur. vt proponitur.

3. *LIBRA 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul.* Quæstio 3.

O Libra

Libra 1. croci 10. Iul. Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum est, vt 1. libra constet 7. Iulijs? Quando plures res proponuntur alligandæ, varijs modis fieri potest alligatio, dummodo qualibet semel saltem alligetur.

Nota.

Potest enim quodlibet pretiū cum quolibet alio, vel cum pluribus etiam alligari ad pretiū mediū; ita tamen, vt statutum pretium sit medium inter duo, quæ alligantur ad ipsum, vel certe alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod varijs alligationibus explicabimus.

Varijs modis fieri posse alligationem eiusdē exempli.

PRIMO ergo alligabimus pretia piperis, & zingiberis ad pretiū medium, quorum differentiæ sunt 3. & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyoph. & croci, quorū differentiæ sunt 4. et 3. alternatim quoque positæ.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	Piper.	4.	1.
	Garyoph.	3.	3.
7.	*Cinnam.*	6.	1.
	Crocus.	10.	4.
	Zingib.	8.	3. 1.
			13.
	Summa differentiarum.		

Deniq; quia superest solum cinnam. alligabimus eius pretium cum pretio zingib. exempli gratia, quorum differentiæ sunt 1. & 1. alternatim etiam scriptæ. Omnium differentiarū summa est

13. *Differentiæ autem è regione zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiusdem pretij positæ colligendæ sunt in vnam summam. Dic iam. Si summa differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 1.3.1.4.4? vt hic vides.*

Quid sit faciendū, quā plures differentię ponūtur è regione eiusdē pretij.

$$13.\quad 1.\left\{\begin{array}{c}1?\\3?\\1?\\4?\\4?\end{array}\right\}\textit{fiunt}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{13}\text{. pip.}\\\frac{3}{13}\text{. garyoph.}\\\frac{1}{13}\text{. cinnam.}\\\frac{4}{13}\text{. croc.}\\\frac{4}{13}\text{. zingib.}\end{array}\right.$$

Hac ratione habebis 1. lib. ex omnibus, quæ constet 7. Iul. Vt examines, dic. Si 1. lib. piperis valet 4. Iul. quid valebit $\frac{1}{13}$? Item, si 1. lib. garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt $\frac{3}{13}$? Item, si 1. lib. cinnam. valet 6. Iul. quid valebit $\frac{1}{13}$? Itē si 1. lib. croci valet 10. Iul. quid valebūt $\frac{4}{13}$. Itē si 1. lib. zingib. valet 8. Iul. quid valebunt $\frac{4}{13}$? veluti hic cernis.

$$1.\left\{\begin{array}{c}4\\3.\\6.\\10.\\8.\end{array}\right\}\textit{quid}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{13}?\\\frac{3}{13}?\\\frac{1}{13}?\\\frac{4}{13}?\\\frac{4}{13}?\end{array}\right\}\textit{fiunt}\left\{\begin{array}{r}\frac{4}{13}\text{. pip.}\\\frac{9}{13}\text{. garyo.}\\\frac{6}{13}\text{. cinna.}\\3\frac{1}{13}\text{. croc.}\\2\frac{6}{13}\text{. zingib.}\end{array}\right.$$

Inuenies q; omnia pretia efficere 7. Iul. vt proponitur.

ALIO modo fiet alligatio, si pretia piperis,

Alia alligatio huius questionis.

& zingib. alligentur ad pretium medium: Item pretia piperis, & croci. Deinde pretia garyoph. & zingib. & rursus pretia garyoph. & croci. Postremo pretia cinnam. & croci: Item pretia cinnam. & zingib. vt in hoc apposito exemplo factum est. Neq; vero plures alligationes fieri possunt in hoc exemplo. Nam pretia piperis, garyoph. & cinnam. inter se alligari non possunt, cum singula minora sint statuto pretio medio: atque ita quodlibet illorum bis tantum alligari potest; posteriorum autem duorum vtrumque ter, nẽpe cũ quo libet trium priorum. At inter se alligari nequeũt, cũ statutum pretium 7. Iuliorum non sit medium inter illa, aut alteri eorum ęquale, sed vtroque minus. Dic ergo. Si summa differentiarum 28. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4.4.4. 8. & 8. vt hic cernis.

	Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium. 7.	Piper.	4.	1. 3.
	Garyoph.	3.	1. 3.
	Cinnam.	6.	3. 1.
	Crocus.	10.	3. 4. 1.
	Zingib.	8.	3. 4. 1.
			28.
	Summa differentiarum.		

28. 1. { 4? 4? 4? 8? 8? } *fiunt* { $\frac{4}{28}$. *pip.* $\frac{4}{28}$. *garyoph.* $\frac{4}{28}$. *cinnam,* $\frac{8}{28}$. *croc.* $\frac{8}{28}$. *zingib.* }

Ita enim conflabis 1.*libram ex omnibus, quę con stet* 7. *Iulijs. Quod vt probes, dic. Si* 1.*lib. pip. valet* 4.*Iul. quid valebũt* $\frac{4}{28}$? *Item, Si* 1.*lib. garyoph. valet* 3. *Iul. quid valebunt* $\frac{4}{28}$? *&c. veluti hic factum esse vides.*

1. { 4. 3. 6. 10. 8. } *quid* { $\frac{4}{28}$. $\frac{4}{28}$. $\frac{4}{28}$. $\frac{8}{28}$. $\frac{8}{28}$. } *fiũt* { $\frac{16}{28}$. *pip.* $\frac{12}{28}$. *garyoph.* $\frac{24}{28}$. *cinnam.* $2\frac{24}{28}$. *croc.* $2\frac{8}{28}$. *zingib.* }

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. *Iulios, quemadmodum in quæstione proponitur.*

Alia alligatio huius quęstionis.

POTEST etiã alia ratione instituiallligatio huius eiusdem exẽpli, si pretia piperis, & croci alligentur;

Pretium medium.		*Pretia.*		*Differentiæ.*
		Piper.	4.	3.
		Garyoph.	3.	1.
7.		Cinnam.	6.	1.
		Crocus.	10.	3.
		Zingib.	8.	4. 1.
				13.
				Summa differentiarum.

 Dein-

Deinde pretia garyoph. & zingib. Ac postremo pretia cinnam. & zingib. vt in hoc exemplo videre licet. Dic ergo. Si summa differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 3. 1. 1. 3. & 5? quemadmodum hic vides.

13.	1.	3?	fiunt	$\frac{3}{13}$	pip.
		1?		$\frac{1}{13}$	garyoph.
		1?		$\frac{1}{13}$	cinnam.
		3?		$\frac{3}{13}$	croc.
		5?		$\frac{5}{13}$	zingib.

Sic enim habebis 1. lib. ex omnibus pro 7. Iulijs. Quod probabis, vt supra.

Quid obseruãdum sit ĩ alligationib. pluriũ rerum.

VIDES igitur, varijs modis fieri posse alligationem, si res alligandæ plures sint, quàm duæ; dummodo pretium medium semper minus sit vno pretio alligãdo, & maius altero; vel æquale vni. & maius, vel minus altero. Verum licet ex varijs alligationibus semper habeas pondus rerum miscendarum propositum pro pretio medio statuto, non tamen eadem semper pondera ex rebus miscendis accipies, vt ex propositis exemplis perspicuum est.

Quæstio 4.

4. VLNA 1. panni rubri valet 4. aur. & vlna 1. panni viridis valet 6. aur. & vlna 1. panni nigri valet 10. aur. Vult quidam ex omnibus 80. vlnas pro 480. aureis. quantum ergo ex singulis pannis accipiet? In huiusmodi quæstionibus oportet prius inuestigare pretium vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ. quod ita fiet in nostro e-

xemplo. Si 80. vlnæ mixtæ valent 480. aur. quid valebit 1. vlna? inueniesq́; 6. aur. quod est pretiũ 1. vlnæ medium inter pretium vilioris panni, & pretium carioris. Quòd si reperiretur pretium non mediũ, impossibilis esset quæstio. Vt si diceret aliquis. Vult quidã ex omnibus pannis 80. vlnas pro 300. aur. vel pro 900. aur. impossibilis esset quæstio. Nam si 800. vlnæ valent 300. aur. valebit 1. vlna $3\frac{3}{4}$. aur. quod pretium minus est pretio vilioris panni. Quare neq; ex viliori pãno habere potest quispiam 80. vlnas pro 300. aureis, tantum abest, vt ex omnibus ulnas 80. accipiat. Rursus, si 80. vlnę valent 900. aur. valebit 1. vlna $11\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius est pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quàm 80. emet quispiam aureis 900. ac proin de multo plures, si ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad nostrũ exemplum.

Q̃ñ quæstio alligationis est impossibilis.

INVENTO pretio medio vnius vlnę, fiat alligatio, vt in præcedentibus, quẽadmodũ hic est factum.

Pretium medium.		Pretia.		Differentiæ.
6.	rub.	4.		4.
	virid.	6.		4.
	nig.	10.		2.0.
				10.
			Summa differentiarum.	

Primum enim alligauimus pretia 4. & 10.

ad medium pretiũ 6. Deinde pretia 6. & 10. Dic igitur. Si summa differentiarum 10. dat 80. vlnas, (tot enim vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt singulæ differentiæ 4. 4. & 2? vt hic factum est.

10. 80. { 4? 4? 2? } *fiunt* { 32. *rubri.* 32. *viridis.* 16. *nigri.* }

Ita enim ex tribus illis pannis sumentur 80. vlnæ pro 480. aur. Quod ita probabis. Si 1. vlna ualet 6. aur. (hoc enim pretium medium inuentum est vnius ulnę ex tribus pannis mixtę.) quid valebunt 32. vlnę panni rubri, & 32. uiridis, & 16. nigri? ueluti hic cernis.

1. 6. { 32? 32? 16? } *fiunt* { 192. *rub.* 192. *uirid.* 96. *nig.* }

Reperiesq́ omnia pretia conficere 480. aureos.

QVOD si pretium panni uiridis non alligassemus cũ pretio panni nigri, sed cum pretio panni rubri, fieret sequens alligatio. Verum alios numeros inuenissemus. Dixissemus enim. Si summa differentiarum 8. dat 80. ulnas, quid dabunt singulæ differentiæ 4. 2. & 2? ut hic uides.

Pre-

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
	rub.	4.	4. 0.
6.	virid.	6.	2.
	nig.	10.	2.
			8.
			Summa differentiarum.

8. 80. (4? 2? 2?) *fiunt* (40. *rub.* 20. *virid.* 20. *nig.*)

Examen fiet, ut prius, si dicas. Vlna 1. *ualet* 6. *aur. quid ualebunt ulnę* 40. *panni rubri, & 20. uiridis, & 20. nigri? Inuenies enim omnia pretia conficere* 480. *aureos.*

5. *SVNT quatuor genera uini; primi amphora* 1. *ualet* 21. *baioch. secundi* 27. *tertij* 30. *& quarti* 40. *Vult quidam miscere ex his* 300. *amphoras, ea lege, & conditione, ut singulæ amphorę ualeant* 33. *baioch. Quantum ergo ex quolibet accipiet? Hic necessario tria priora pretia cum posteriori alliganda sunt ad mediũ pretium* 33. *baioch. cũ illą tria sinț hoc minora, vt in dato exemplo uides. Dic ergo. Si summa differentiarum* 42. *dat* 300. *amphoras, quid dabunt singulæ differentię* 7. 7. 7. *&* 21? *ut patet in exẽplo.* Quæstio 5.

Pre-

Pretia.	*Differentiæ.*
21.	7.
27.	7.
30.	7.
33. 40.	12. 6. 3.
	42.
Summa differentiarum.	

42.	300.	7? 7? 7? 21?	*fiunt*	50.*primi.* 50.*secundi.* 50.*tertij.* 150.*quarti.*

Sic enim conficies 300.amphoras, quarum singulæ constabunt 33. baioch. Quod ut probes, dic. Si summa differentiarum 42.dat 1. amphoram, quid dabunt singulę differerentię 7.7.7. & 21? ut hic uides.

42.	1.	7? 7? 7? 21?	*fiunt*	$\frac{1}{6}$. *primi.* $\frac{1}{6}$. *secundi.* $\frac{1}{6}$. *tertij.* $\frac{1}{2}$. *quarti.*

Atq; ita habebis unam amphoram ex quadrupli ci illo uino mixtam. Dic ergo rursus. Si 1.amphora uini primi ualet 21.baioch.quid ualebit $\frac{1}{6}$.amphо-

phor?? Item si 1. amphora secundi ualet 27. quid ualebit $\frac{1}{6}$? Item si 1. amphora tertij ualet 30. quid ualebit $\frac{1}{6}$? Item si 1. amphora quarti ualet 40. quid ualebit $\frac{1}{2}$. ut hic uides.

$$1.\left\{\begin{matrix}21.\\27.\\30.\\40.\end{matrix}\right\}\text{quid}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{6}?\\\frac{1}{6}?\\\frac{1}{6}?\\\frac{1}{2}?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}3\frac{1}{2}.\ \text{primi.}\\4\frac{1}{2}.\ \text{secundi.}\\5.\ \text{tertij.}\\10.\ \text{quarti.}\end{matrix}\right.$$

Quæ omnia pretia efficiunt 33. baioch. vt proponitur.

BREVIVS tamen ita quoq; institui potest examen. Quoniam si 1. amphora valere debet 33. baioc. valebunt 300. amphoræ 9900. baioch. Dicemus ergo. Si 300. amphoræ valent 9900. baioch. quid valebunt 50. amphoræ primi vini, & quid 50. secundi, & 50. tertij, & 150. quarti? vt hic vides.

$$300.\quad 9900.\left\{\begin{matrix}50?\\50?\\50?\\150?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}1650.\ \text{primi.}\\1650.\ \text{secundi.}\\1650.\ \text{tertij.}\\4950.\ \text{quarti.}\end{matrix}\right.$$

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900. baiochos.

6. *QVIDAM pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromatum variorum, nimirum garyophillorũ, piperis, cinnamomi, zingiberis, nucum myristicarum, & croci, quorum hæc sunt pretia pro singulis libris, Iulij 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot* Quæstio 6.

ergo

ergo singulorum libras accipiet, vt 400. lib. pro 400. aur. habeat? Hic vt in quæstione 4. dictũ est, inuestigandum est prius pretium mediũ vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib? Inue uenies enim 1. aur. hoc est, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri possunt alligationes, alligabimus primum garyoph. cum zingib. & croco. Deinde piper cũ nuc. myrist. & croco. Postremo cinnam. cũ nuc. myrist. vt hic factũ esse vides. Deinde dicem⁹. Si summa differẽtiarũ 32. dat 400 lib. qd dabunt singulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7? vt hic vides.

Pretium medium		Pretia.		Differentiæ.	
10.	garyoph.	6.		1.	6.
	piper.	7.		2.	6.
	cinnam.	9.		2.	
	zingib.	11.		4.	
	nuc. myr.	12.		3.	1.
	crocus.	16.		4.	3.
				32.	
	Summa differentiarum.				

32. 400.	7?	fiunt	$87\frac{1}{2}$.	garyo
	8?		100.	pip.
	2?		25.	cinnam.
	4?		50.	zingib.
	4?		50.	nuc. myr.
	7?		$87\frac{1}{2}$.	croc.

Inue-

Inuenies enim 400. lib. quę valebunt 400. aur. & singulæ lib. constabunt 10. Iulijs. Quod probabis, vt in præcedenti quæstione dictum est.

POSSVNT fieri in hac quęstione plures aliȩ alligationes diuersę, vt in quatuor exemplis hic appositis apparet.

Pretium medium.	Pretia.	Differentię.
	6.	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
	9.	1. 2. 6.
10.	11.	4. 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
		51.
Summa differentiarũ.		

Pretium medium.	Pretia.	Differentię.
	6.	1.
	7.	2.
	9.	6.
10.	11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
		17.
Summa differentiarũ		

Pretium medium.	Pretia.	Differentię.
	6.	6.
	7.	2.
	9.	1.
10.	11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
		17.
Summa differentiarũ.		

Pretium medium.	Pretia.	Differentię.
	6.	2.
	7.	1.
	9.	6.
10.	11.	3.
	12.	4.
	16.	1.
		17.
Summa differentiarũ.		

In primo enim quodlibet priorum triũ pretiorum alligatum est cum omnibus tribus posterioribus. In secundo vero primum cum quarto, & secundum

dum cum quinto, & tertium cum sexto. In tertio deinde primum cum sexto, & secundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto denique primum cũ quinto, & secundum cum quarto, & tertium cum sexto. Atque ita in similibus quęstionibus plures fieri possunt alligationes inter se diuersę.

Quæstio 7. 7. *QVIDAM vult statuam argenteam 300. librarum. Offeruntur ei duo genera argenti: Primi lib. 1. valet 30. aur. secundi 20. quę ita inter se miscere vult, vt 1. lib. constet 24. aur. Quantum ergo ex quolibet argento sumet, vt habeat 300. lib. quarũ singulę cõstent 24. aur? Ita stabit alligatio, vt hic vides. Dic ergo. Si summa differentiarum 10. dat 300. lib. quid dabunt singulę differentię 4. & 6? vt hic vides.*

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
	24.	30.	4.
		20.	6.
			10.
			Summa differentiarum.

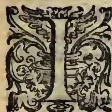
10. 300. { 4? 6? } *fiunt* { 120. *primi arg.* 180. *secundi arg.*

Ita enim reperies 300. libras, quarũ singulę valẽt 24. aur. Quod ꝓbabis, vt in q̃one 5. dictũ est.

RE-

REGVLA FALSI SIMPLICIS POSITIONIS.

Cap. XXII.



NTER alias Arithmeticę regulas non postremum locum obtinet regula falsi, quę sic dicitur, non quòd falsum nos doceat, sed quòd ex falso posito verum eruere ostendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propositę quæstioni putatur satisfacturus, licet re ipsa nō satisfaciat. Hęc autem regula duplex est. Quędam enim vocatur simplicis positionis, in qua nimirum vnica fit positio vnius duntaxat numeri, qui quęstioni creditur satisfacturus: quędam vero duplicis positionis dicitur, in qua videlicet duplex fit positio duorum numerorū, quorum vterque quęstioni satisfacturus putatur. Regula falsi cur dicta sit. Regula falsi duplex.

CAETERVM magnum est inter duas has regulas discrimen. Quidquid enim per priorem soluitur, id etiam per posteriorem explicari potest, non autem contra. Innumerę enim propemodum quęstiones per posteriorem soluuntur, quę nulla ratione per priorem possunt explicari. Nam sub priori continentur illę tantum quęstiones, in quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, Discrimen inter duas regulas falsi. Nota.

tur, qui eandem proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis: quales sunt $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$. &c. Item numeri dupli, tripli, quadrupli, &c. Itaque satis esset, si posterior regula sola proponeretur. Sed quia per priorẽ plurimæ quæstiones multo breuius explicantur, quam per posteriorem, vtramque paucis declarabimus, initio sumpto à priori, quæ facilior est.

Regula falsi simplicis positionis quõ fiat.

PROPOSITA igitur quæstione quacunque per regulam falsi simplicis positionis soluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæstioni creditur satisfacturus; isq; iuxta quæstionis tenorem examinetur; & quidem si omnia consonent, numerus positus erit is, qui quæritur: Si vero aliter se res habeat, falsa fuit positio numeri assumpti. Quare ex hoc falso eliciendum erit verum beneficio regulę trium, vt in exemplis declarabitur.

Questio 1.

1. TRES emere constituunt domum quandam 2700. aur. Secundus duplo plus vult dare, quàm primus, & tertius triplo plus, quàm secundus. Quantum ergo quisq; expendet? Hac quæstione nihil aliud quæritur, quàm vt numerus 2700. diuidatur in tres partes ea lege, vt secunda sit dupla primæ, & tertia tripla secundæ. Pone ergo primum dare quotcunq; aureos volueris, nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæstionis secundus dabit 12. cum hic numerus sit duplus primi; tertius vero dabit 36. quòd hic numerus sit triplus secundi. Omnes autem hi tres numeri efficiunt 54. aur. cum tamen efficere deberent 2700. Dic ergo. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 6. aur. primi,

primi, ex qua vera positione prouenient 2700? *Inueniesq; primum dedisse* 300. *aur. ac proinde secundum* 600. *& tertium* 1800. *qui omnes tres numeri efficiunt* 2700.

POSSET quoq; pecunia secundi, & tertij reperiri ex vtriusq; positione, si diceretur. Si 54. *prouenerunt ex falsa positione* 12. *aur. secundi, & ex falsa positione* 36. *aur. tertij, ex quo prouenient* 2700? *Inuenires enim pecuniam secundi esse* 600. *aur. & tertij* 1800. *Sed satius est inuestigare per regulam trium pecuniam vnius duntaxat. Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur, iuxta tenorem quæstionis.*

EOSDEM prorsus numeros reperisses, si pro primo alium numerum posuisses, quàm 6. *ac proinde pro secundo alium, quàm* 12. *& pro tertio alium, quàm* 36.

2. *INTERROGATVS quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, respondit se nescire, hoc tamen se certo à procuratore cognouisse,* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{4}$. *&* $\frac{1}{5}$. *suæ pecuniæ constituere* 4700. *aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur, quàm numerus, cuius* $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. *&* $\frac{1}{5}$. *simul efficiant* 4700. *Pone ergo illum habere* 60. *aur. (vt autem fractiones vitentur, quo ad fieri potest, sumendus est semper numerus, qui contineat fractiones in quæstione expressas, vt cap.* 10. *docuimus, qualis hic est* 60.) *cuius* $\frac{1}{3}$. *est* 20. *&* $\frac{1}{4}$. 15. *&* $\frac{1}{5}$. 12. *quæ omnes partes constituunt* 47. *Debebant autem conficere* 4700. *Dic ergo. Si* 47. *prouenerũt ex* 60. *quẽ numerum* Quæstio 2.

P *falso*

falso posuimus, ex quo prouenient 4700? inueniemusq́, 6000. atq; tot aureos in arca habuit. Nam $\frac{1}{3}$. *continet* 2000. *&* $\frac{1}{4}$. 1500. *&* $\frac{1}{5}$. 1200. *quæ omnes partes efficiunt* 4700.

Quæstio 3. 3. *INTERROGATVS quidam ludi magister, quot haberet haberet discipulos, respondit: Si adhuc semel tot haberē, quot habeo, & accederet* $\frac{1}{2}$. *eorum, &* $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *& præterea* 1. *haberem* 112. *Quot ergo discipulos habuit? Hæc quæstio ita proposita solui non potest per hanc regulam, propterea quòd vnitas, cuius postremo loco fit mentio, non potest habere eandem proportionem cum* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. *& duplo parui numeri, quam cum eisdē partibus, & duplo magni numeri. Si tñ auferatur* 1. *ex numero* 112. *qui in quæstione debet produci, soluetur quæstio proposita. Tūc enim nihil aliud quæritur, quàm numerus, qui bis sumptus, vnà cum* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *facit* 111. *Nam si tandem addatur* 1. *fient* 112. *Pone ergo illum habuisse* 12. *discipulos. Hic enim numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem discipuli accedant, habebit* 24. *nēpe duplo plures, quàm prius. Ad quos si rursus accedat* $\frac{1}{2}$ *nimirum* 6. *&* $\frac{1}{3}$. *nempe* 4. *&* $\frac{1}{4}$. *vtpote* 3. *habebit* 37. *Debebant autem esse* 111. *vt addito* 1. *haberet* 112. *Dic ergo. Si* 37. *prouenerunt ex* 12. *ex quo prouenient* 111? *Inueniesq́, eum habuisse* 36. *discipulos. Nam si accedant totidem, habebit* 72. *quibus si addantur* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *videlicet* 18. 12. *&* 9. *fient* 111. *addito denique* 1. *fient* 112.

Quæstio 4. 4. *QVIDAM emit equum, hortum, ac domum*

mum 5000. aur. ea lege, vt hortus quadruplo pluris constet, quàm equus, at domus quincuplo pluris, quàm hortus. Quanti ergo emit equum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur, vt numerus datus 5000. distribuatur in tres partes, ita vt secunda sit primæ quadrupla, et tertia secūdæ quincupla. Estq; quæstio hæc similis primæ. Pone ergo, equum valere 30. aur. quo posito, valebit hortus 120. aur. & domus 600. qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo, Si 750. prouenerūt ex 30. ex quo prouenient 5000? Inueniesq; 200. atque tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus emptus fuit 800. aur. & domus 4000. qui omnes numeri constituunt 5000. aur.

5. QVIDAM *proficiscens Venetijs Hierosolymam expēdit in itinere* $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. *suæ pecunię; domum autem reuersus deprehendit sibi superesse 36. aureos. Quantum ergo pecuniæ is secū tulit? Hic quæritur numerus, à quo si auferantur* $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. *reliquus sit numerus 36. Pone illum habuisse 300. aur. ex quo si auferas* $\frac{2}{3}$. *nempe 200. &* $\frac{1}{5}$. *nimirum 60. supersunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40. prouenerunt ex 300. ex quo prouenient 36? Inueniesq; 270. atque tot aureos habuit. Nam ablatis* $\frac{2}{3}$. *nempe 180. &* $\frac{1}{5}$. *nimirum 54. supersunt 36.* Quæstio 5.

QVOD *si quando contingat, partes in quæstione expressas vnitatem superare, ac proinde nō posse ex posito numero subtrahi, quæstio impossibilis erit. Vt si diceret quis. Da mihi numerum, vt,* Nota.

si ex eo demas $\frac{2}{3}$. *&* $\frac{3}{5}$. *relinquantur* 36. *quæstio esset impossibilis. Nam* $\frac{2}{3}$. *&* $\frac{3}{5}$. *vnitatem superant, ac proinde auferri nequeunt ex posito numero* 300. *quia* $\frac{2}{3}$. *sunt* 180. *&* $\frac{3}{5}$. *sunt etiam* 180. *quæ partes simul constituunt* 360. *qui numerus ex* 300. *auferri non potest.*

Quæstio 6. 6. *QVAERATVR numerus, cuius* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. *&* $\frac{1}{6}$. *efficiant* 522. *Pone numerum eum esse* 60. *cuius* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. *&* $\frac{1}{6}$. *nempe* 30. 20. 15. 12. *&* 10. *efficiunt* 87. *Nos autem volumus* 522. *Dic ergo, Si* 87. *prouenerunt ex* 60. *ex quo prouenient* 522? *Inueniesq́;* 360. *Huius enim numeri* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. *&* $\frac{1}{6}$. *nimirũ* 180, 120. 90. 72. *&* 60. *efficiunt* 522.

Quæstio 7. 7. *QVIDAM interroganti se, quantum pecuniæ haberet, respondit, se tot aureos habere, vt si ad eos addatur* $\frac{1}{2}$. *eorum, &* $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *& præterea* 100. *aur. constituant* 300. *aur. Quãtam ergo pecuniam habuit? Vt hæc quæstio per hanc regulam soluatur, detrahendi sunt* 100. *aur. ex* 300. *vt in quæstione* 3. *diximus, & inquirendus numerus, vt, si addatur eius* $\frac{1}{2}$. *&* $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *fiãt* 200. *Tunc enim additis* 100 *fiẽt* 300. *vt in quæstione proponitur. Pone ergo eum numerum esse* 24. *Huius* $\frac{1}{2}$. *est* 12. *&* $\frac{1}{3}$. 8. *&* $\frac{1}{4}$. 6. *quæ omnes partes additæ ad* 24. *faciunt* 50. *Nos autem volumus, vt efficiant* 200. *Dic ergo. Si* 50. *prouenerunt ex* 24. *ex quo prouenient* 200? *Inueniesq́;* 96. *ac tanta fuit summa aureorum. Nam* $\frac{1}{2}$. *continet* 48. *&* $\frac{1}{3}$. 32. *&* $\frac{1}{4}$. 24. *qui omnes numeri faciunt* 104. *additi autem ad* 96. *efficiunt* 200,

ad quē numerū si tandē adijciantur 100. fiēt 300.

8. QVIDAM volens molere 500. modios tritici adit molitorē habentem 5. molas, quarum prima singulis horis molit 7. modios, secunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, si omnibus molis triticū imponatur, & quantū tritici singulis molis imponendū? Pone in 4. horis. Quo posito, prima mola cōficiet 28. modios, secunda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modij faciūt 80. Debent autem esse 500. Dic ergo. Si 80. modij prouenerūt ex 4. horis: 500. modij ex quot horis prouenient? Inueniesq́; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, secunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes sunt 500. modij; atq; tot modij cuilibet molæ subijciendi sunt, quot ipsa modios molit in 25. horis. Quæstio 8.

9. QVIDAM proficiscens ad nundinas lucratus est ex pecunia, quam secum attulerat, tantum, vt lucrū vnà cum pecunia allata triplū esset pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in alijs nundinis tantam pecuniam lucratus est, vt lucrū vnà cum pecunia ad has nūdinas allata quincuplum esset huius pecuniæ. Postremo ex hac pecunia in alijs nundinis tantum lucratus est, vt lucrum vnà cum pecunia, quam proxime habebat, quadruplum esset huius pecuniæ; inuenitq́; se habere 40000. aur. Quantū ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit? In hac quæstione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3. & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. Quæstio 9.

faciat 40000. *Pone eum numerum esse* 10. *quem si multiplices per* 3. *facies* 30. *pro lucro vnà cum pecunia in primis nundinis. Si autem multiplices* 30. *pro* 5. *procreabis* 150. *pro lucro vnà cum pecunia in secundis nundinis. Si denique multiplices* 150. *per* 4. *facies* 600. *pro lucro vnà cum pecunia in tertijs nundinis. Nos vero diximus, in tertijs nũdinis eũ habuisse* 40000. *tm̃ aur. Dic ergo. Si* 600. *prouenerunt ex* 10. *ex quo prouenient* 40000? *Inueniesq́;* $666\frac{2}{3}$. *atque tot aureos secũ ille attulit ad primas nundinas. Nam si multiplicemus* $666\frac{2}{3}$. *per* 3. *efficiemus* 2000. *pro lucro & pecunia in primis nundinis. Si deinde multiplicemus* 2000. *per* 5. *gignemus* 10000. *pro lucro ac pecunia in secundis nundinis. Si denique multiplicemus* 10000. *per* 4. *producemus* 40000. *pro lucro ac pecunia in tertijs nundinis.*

Quæst. 10. 10. *INVESTIGETVR numerus, vt eo multiplicato per* 4. *& producto per* 3. *& hoc producto per* 6. *atq; huic producto additis* 10. *producãtur* 800. *Hæc qõ per hãc regulã solui nequit, nisi prius detrahantur* 10. *ex* 800. *propter rõnem in quæstione* 3. *dictam. Subtrahe ergo* 10. *ex* 800. *relinquenturq;* 790. *atque hic numerus producendus est ex multiplicationibus in quæstione expressis. Nam si ei addantur* 10. *fiet numerus* 800. *Pone numerum quæsitum esse* 10. *quem si multiplices per* 4. *facies* 40. *qui numerus multiplicatus p* 3. *facit* 120. *hic deniq; numerus multiplicatus per* 6. *producit* 720. *Deberent autem produci* 790. *Quare dic. Si* 720. *prouenerunt ex*

10.

10. ex quo prouenient 790? Inueniesq́, $10\frac{3}{3}\frac{5}{6}$. atque hic est numerus, qui quæritur. Si enim multiplices $10\frac{3}{3}\frac{5}{6}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum si rursus multiplices per 3. gignes numerum $131\frac{2}{3}$. quem si denique per 6. multiplices, procreabis 790. Additis autem 10. fient 800.

11. SENEX *quidam interroganti de sua ætate, respondit, se tot habere annos, vt si eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipsorum, & ex summa detraheretur $\frac{1}{4}$. ipsius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniẽdus est numerus, ad quem si adijciatur $\frac{1}{2}$. ipsius, & ex summa detrahatur $\frac{1}{4}$. eiusdem summæ, reliquus sit numerus 99. Pone eũ habuisse 80. annos. Si igitur adijciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni, fient 120. à quibus si detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. supererunt 90. Dicuntur autem superesse 99. Dic ergo. Si 90. prouenerunt ex 80. ex quo prouenient 99? Inueniesque 88. atque tot annos senex ille habuit. Si namq; eis adijcias $\frac{1}{2}$. eorum, nimirum 44. facies 132. à quibus si auferas $\frac{1}{4}$. nempe 33. supererunt 99.* Quæst. 11.

12. APPARET *fastigium cuiusdã turris 24. palmorum: dicit autem quidam, $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. eiusdem turris à circumiacentibus ædificijs occultari. Quanta ergo est totius turris altitudo? Hic quærendus est numerus, ita vt, si ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{2}{5}$. relinquantur 24. Pone eum numerum esse 30. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{2}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. proueniunt ex 30. ex quo prouenient 24? Inueniesq́;* Quæst. 12.

90. *ac tanta est altitudo turris. Nam si auferas* $\frac{1}{3}$.*&* $\frac{2}{5}$. *nempe* 30.*&* 36. *relinquentur* 24.

Quæst. 13. 13. *EST hasta, cuius* $\frac{1}{3}$. *alba est, &* $\frac{1}{5}$. *nigra, &* $\frac{2}{9}$. *cærulei coloris, supersunt autem* 12. *palmi rubri. Quãta est ergo longitudo illius hastæ? Hic etiam inquirendus est numerus, ita vt, si ex eo dematur* $\frac{1}{3}$.*&* $\frac{1}{5}$.*&* $\frac{2}{9}$.*reliquus sit numerus* 12.*Pone eum numerum esse* 45.*à quo si auferas* $\frac{1}{3}$. *nempe* 15.*&* $\frac{1}{5}$. *nimirum* 9. *&* $\frac{2}{9}$. *hoc est,* 10.*supersunt* 11.*Debent autem remanere* 12. *Dic ergo. Si* 11.*prouenerunt ex* 45.*ex quo prouenièt* 12? *Inuenies\'q;* $49\frac{1}{11}$. *ac tot palmorum est hastæ illius longitudo. Nam eius* $\frac{1}{3}$. *cõtinet palmos* $16\frac{4}{11}$. *at* $\frac{1}{5}$. *continet palmos* $9\frac{9}{11}$. *Item* $\frac{2}{9}$. *continẽt palmos* $10\frac{10}{11}$. *qui omnes numeri ablati ex longitudine hastæ palmorum* $49\frac{1}{11}$. *relinquunt* 12. *palmos.*

Quæst. 14. 14. *QVIDAM pro* 30.*vlnis panni albi, &* 40. *vlnis panni nigri expendit* 660. *aureos, constiteruntq; singulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quàm singulæ vlnæ panni albi. Quanti ergo cõstitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnam vlnam panni albi constitisse* 4. *aur. Et quoniam pretium vnius vlnæ panni nigri est duplo maius, necesse est, vnam vlnam panni nigri constitisse* 8.*aur. Ex quo fit,* 30. *vlnas panni albi constare* 120. *aur. &* 40. *vlnas panni nigri valere* 320. *aur. qui omnes aurei efficiunt* 440. *Nos autem diximus, illum expendisse* 660. *aur. Dic ergo. Si* 440.*prouenerunt ex* 4.*ex quo prouenient* 660? *Inuenies\'q;* 6.*aur.pro pretio vnius vlnæ pan-*

ne panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi cõstabunt 180. aur. & 40. vlnæ panni nigri valebũt 480. aur. qui omnes aur. conficiunt 660. aur.

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

Cap. XXIII.



ROPOSITA *quæstione quacunq; per regulam falsi duplicis positionis explicanda, ponatur quiuis numerus siue paruus, siue magnus, qui iuxta tenorem quæstionis examinetur. Nam si is quęsito respondeat, soluta erit quæstio; sin minus, notandus erit excessus, vel defectus, quo à veritate aberratum est, vnà cum litera P. vel M. quarũ illa plus, hæc vero minus significat, prout videlicet error veritatem excesserit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rursus aliquis alius numerus siue maior priore, siue minor, qui eodem modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac positione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo.* Regula falsi duplicis positionis quõ fiat.

SI *in vtraque positione à veritate aberratũ est per excessum, vel defectũ, subtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus ꝓ diuisore serue-* Qñ vtraq; positio veritatem excedit, fit subtractio.

seruetur. Deinde numerus primo positus per secundũ errorem, & numerus secundo positus per primum errorem multiplicetur, minórq; numerus productus ex minore detrahatur. Nam si numerus hic residuus per diuisorem iam inuentum, nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit Quotiens numerum quæsitum, qui quæstioni propositæ satisfaciet.

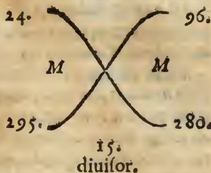
Qñ vna positio veritatem excedit, & altera deficit, fit additio.

SI vero in alterutra positione à veritate aberratum est per excessum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam summam, vt habeatur diuisor: Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum positorum per errores, vt dictum est, producuntur, in vnam summam sunt colligendi, vt habeatur numerus diuidendus, &c. Id quod ex quęstionibus fiet perspicuum.

Quęstio 1.

1. QVAERATVR numerus, à cuius dimidio subtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquantur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirum habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæstione expressam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expressas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat, vt fractiones, quoad fieri potest, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, si numerus sumatur habens posteriores fractiones, & is postea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad sinistram in superiori parte crucis, & error in parte inferiori ad sinistrã quoque, litera deniq; P. vel M. prout veritatem excesserit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem sinistram: Secundus vero numerus

rus acceptus cum errore, & litera P. vel M. eodem ordine collocari solet ad dexteram eiusdem crucis, vt in nostro exemplo factũ esse vides. Hic numerus 24. positus ita iuxta pronunciationẽ quæstionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 12. à quo numero detrahẽda est $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Est autem $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquunt 5. Debebant autem relinqui 300. Aberratum est ergo a veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus est cum litera M.



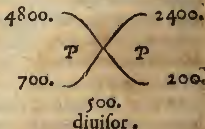
PONATVR *secundo numerus 96. qui ita iuxta quæstionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 48. at $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. sunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rursus a veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notãdus est etiam cum litera M.*

IAM *vero, quia in vtraque positione defecimus a vero, subtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuisor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo positus per 280. secundum errorẽ, & numerus 96. secundo positus per 295. primũ errorem, minorq; numerus productus 6720. ex*

maiore

maiore 28320. subtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuisus per diuisorem inuentum 15. dabit Quotientem 1440. qui est numerus quæsitus. Eius enim $\frac{1}{2}$*. est 720. & huius* $\frac{1}{3}$*. &* $\frac{1}{4}$*. sunt 240. & 180. qui numeri ex 720. detracti, relinquunt 300. vt in quæstione proponebatur.*

SED soluamus eandem quæstionem per alios duos numeros, qui veritatem excedāt; deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primum numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$*. est 2400. cuius* $\frac{1}{3}$*. &* $\frac{1}{4}$*. sunt 800. & 600. q numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autē relinqui 300. excessimus ergo veritatem 700. vnitatibus, atq; adeo error hic scribendus est cum litera P.*



Ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$*. est 1200. cuius* $\frac{1}{3}$*. &* $\frac{1}{4}$*. sunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis, remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Excessimus ergo rursus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, subtracto minore errore de maiore, relinquetur diuisor 500. facta autem multiplicatione numerorum positorum per errores in crucem, vt dictum est, subtractoq; minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus diuidendus*

720000.

720000. qui per 500. diuiſus dabit Quotientem 1440. vt prius.

RVRSVS *ponamus primo numerũ 2400. quo examinato iuxta quæſtionem propoſitam, inueniemus exceſſum 200. qui error ſcribendus eſt cum litera P. Deinde ponamus numerũ 96. quo eadem ratione examinato, deprehendemus defectum 280. qui ſcribendus eſt cum litera M. Quoniam vero in vna poſitione exceſſimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum, vt cõponatur diuiſor 480 Itẽ duo numeri producti ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucẽ, nempe 672000. & 19200. in vnam ſummã colligendi, vt fiat diuidendus numerus 691200. Diuiſo ẽm hoc numero 691200. per 480. fiet Quotiens 1440. veluti prius.*

2400.		96.
P		M
200.		280.
	480. diuiſor.	

2. ALEXANDER *Magnus in familiari colloquio, quod cum Caliſthene philoſopho quodam die habuit in ætatũ mentionem forte fortuna, vt accidere ſolet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Epheſtionem duobus ſupero annis, Clytus vero noſtram amborum ætatem complectitur, & inſuper quatuor annos. Ex quo fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixiſſe dicitur. Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Epheſtion, & Clytus? Vi-* Quæſtio 2.

des

des hic numerum 96. distribuendum esse in tres partes, ita vt prima superet secundam binario, tertia vero duas primas simul sumptas quaternario excedat. vel inueniẽdos esse 3. numeros, quorum primus secundum superet binario, & tertius primos duos simul sumptos quaternario excedat, omnes vero tres constituant 96. Pone ergo Alexandrum habuisse annos 20. ac proinde Ephestionem 18. & Clytum 42. Ita enim ætas Alexandri superat Ephestionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & insuper 4. annos, vt in quæstione proponitur. Quoniã vero hi numeri 20, 18. 42. constituũt tantũ 80, qui 96. deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. Pone ergo rursus Alexãdri annos fuisse 30. ac propterea

20.		30.
18.		28.
42.		62.
——M		P ——
80.		120.
16.		24.
	40.	
	Diuisor.	

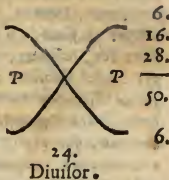
Ephestionem habuisse annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Excessimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter se, quòd vnus defecerit à veritate, & alter eandem excesserit, fient 40. per diuisore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productisque 480. 480. inter se additis, fient 960. quibus

diui-

diuisis per 40. fiet Quotiens 24. atque tot annos tunc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæstionis tenorem, Epheſtio 22. & Clytus 50. qui omnes conſtituunt 96. annos.

3. TRES *habent ſummam quandam pecuniæ, nempe 44. aureos. Secũdus habet duplo plus quàm primus, & præterea 4. aureos. Tertius autem tantum habet, quantum primus & ſecũdus, & præterea 6. aur. Quãtum ergo quiſque habet? Hic vides numerũ 44. diſtribuendum eſſe in tres partes, vt ſecunda dupla ſit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis ſit primæ, ac ſecũdæ, contineatq; præterea 6. Vel querẽdos eſſe tres numeros, quorum ſecundus contineat primum bis, & inſuper 4. tertius vero contineat primum, & ſecundum ſemel, & præterea 6. ipſi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo poſito, habebit ſecũdus 24. nẽpe duplo plus, quàm primus, & inſuper 4. tertius autẽ habebit 40. tãtum videlicet, quantum primus ac ſecundus, ac p̃terea 6. qui tres* Quæſtio 3.

10.
24.
40.
———
74.
30.



numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo ſecundus 16. & tertius 28. qui tres numeri

con-

conficiunt 50. Deberent autem conficere solũ 44. Excessimus ergo rursum veritatẽ 6. vnitatibus. facta iam subtractione minoris erroris de maiore, quia vterq; error excessit veritatem, reliquus erit diuisor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. subtractoq; illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 5. Tantum ergo habet primus: secundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam summam collecti efficiunt 44.

S I multiplicarentur numeri, quos posuimus secundum ac tertium habere, per eosdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos secundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanẽt 336. quo numero diuiso per 24. diuisorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero secundi. Item ex 40. per 6. fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt 840. subtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertij. Sed satius est, inuento numero primi, inuestigare reliquos, iuxta pronunciationem quæstionis, nempe eo modo, quo vterq; numerus falsò positus est examinatus. Aliquando tamen commodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæsitus est; vt in quæstione 6. manifestum erit.

Quæstio 4. 4. *QVAERANTVR tres numeri, qui faciant 60. secundus autem contineat primũ bis, & insuper 4. tertius vero contineat primum, ac secun-*

secundum, & praeterea 6. Haec quaestio similis est antecedenti. Pone primum numerũ esse 6. ac proinde secundum 16. & tertium 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autẽ facere 60. Factus est ergo error per defectũ 10. Pone rursus primũ numerum esse 8. ac proinde secundũ 20. & tertiũ 34. qui tres numeri faciunt 62. Debe rent autẽ facere 60. Excessimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula praecipit, inueniesq́, primũ numerum esse $7\frac{2}{3}$. *ac proinde secundum* $19\frac{1}{3}$. *& tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60.*

6.			8.
16.			20.
28.			34.
—	M	P	—
50.			62.
10.			2.
	12. diuisor.		

5. *DIVIDATVR numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60. numerũ faciat triplum numeri ex posteriori parte, & 20. compositi. Pone priorem partem esse 20. ac proinde posteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & posterior cum 20. facit 30. Deberet autem numerus 80. triplus esse numeri 30. iuxta pronunciationem exempli. Cum ergo numerus 90. triplus* Quæstio 5.

20.			24.
10.			6.
—	M	P	—
10.			6.
	16. diuisor.		

sit numeri 30. *defecimus* 10. *vnitatibus à vero. Pone rursus priorem partē esse* 24. *ac propterea posteriorē* 6. *Prior cum* 60. *facit* 84. *& posterior cū* 20. *facit* 26. *Deberet autem numerus* 84. *iuxta tenorem quæstionis, triplus esse numeri* 26. *Cū ergo numerus* 78. *triplus sit numeri* 26. *excessimus veritatē* 6. *vnitatibus. Opare, vt regula pcipit, inuenieſq; priorē partē esse* $22\frac{1}{2}$. *atq; adeo posteriorē* $7\frac{1}{2}$. *Prior. n. cum* 60. *facit* $82\frac{1}{2}$. *& posterior cū* 20. *facit* $27\frac{1}{2}$. *cuius numeri ille tripl⁹ est.*

ALIO modo institui potest solutio huius quæstionis. Postquam enim in prima positione deprehēdimus priorem partem 20. *cum* 60. *facere* 80. *& posteriorē partem* 10. *cum* 20. *facere* 30. *cuius numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus* 80. *Est autem triplus numeri* $26\frac{2}{3}$. *quem numerus* 30. *superat numero* $3\frac{1}{3}$. *Excessimus ergo veritatem hoc numero* $3\frac{1}{3}$. *Rursus postquam in secunda positione inuentum est priorem partem* 24. *cum* 60. *facere* 84. *& posteriorem partem* 6. *cum* 20. *facere* 26. *cuius numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus* 84. *Est autem triplus numeri* 28. *à quo numerus* 26. *deficit* 2. *vnitatibus.*

20.		24.
10.		6.
—	*P* *M*	—
$3\frac{1}{3}$.		2.
	$5\frac{1}{3}$. Diuisor.	

bus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam secundum regulæ præcepta, inueniesq; priorẽ partem esse 22 $\frac{1}{2}$. & posteriorem 7 $\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum facilius per eam vitentur fractiones.

6. *QVAERANTVR tres numeri, quorũ primus additus ad 73. faciat duplũ reliquorum duorum; secundus vero cum 73. faciat triplũ duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplũ reliquorum duorũ. Pone primũ numerum esse 1. vel aliũ quemuis numerum imparẽ, vt additus ad 73. faciat numerum parem, qui possit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet facere numerũ duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet esse, iuxta pronũciationem exempli, reliquorum duorum, necesse est, reliquos duos simul esse 37. Et quia secũdus cum 73. debet facere numerum triplum primi, (qui est 1.) & tertij, diuidendus erit, per antecedentem quæstionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex posteriore parte, & 1. componitur,* Quæstio 6.

1.		3.
10 $\frac{1}{4}$.		12 $\frac{1}{2}$.
26 $\frac{3}{4}$.		25 $\frac{1}{2}$.
P		P
54 $\frac{1}{4}$.		36 $\frac{1}{2}$.
	18 $\frac{1}{4}$. diuisor.	

 atque

atque ita, antequam proposita quæstio soluatur, necesse est, aliam prius soluere, quæ in ipsa operatione occurrit.

PONE ergo priorem partem esse 2. atque adeo posteriorem 35. Facit autem prior cum 73. numerũ 75. posterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus nõ est numerus 75. sed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatibus, cum tot vnitatibus minor sit noster numerus 75. quàm 108. Pone rursus, priorem partem esse 5. atque adeo posteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & posterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non est numerus 78. sed numerus 99. Defecimus ergo rursus 21. vnitatibus. Operare iam secundum præcepta regulæ falsi, inueniesq́ priorem partem esse $10\frac{1}{4}$. ac proinde posteriorem $26\frac{3}{4}$.

2.			5.
35.	M	M	32.
33.			21.
	12. Diuisor.		

ITAQVE si primus numerus propositæ quæstionis est 1. erit secundus $10\frac{1}{4}$. & tertius $26\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & secundus cum 73. facit triplum duorũ reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, satisfactum erit quæstioni. Facit autem tertius cum 73. numerum $99\frac{3}{4}$. qui quadruplus non est numeri $11\frac{1}{4}$. qui ex primo, & secundo conflatur, sed numerus 45. quadruplus est numeri $11\frac{1}{4}$. Excessimus

mus ergo veritatem hoc numero $54\frac{3}{4}$.

PONE iam primum numerum esse 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus esse debet reliquorum duorũ. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia secundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui est 3.) & tertij; diuidendus erit per antecedentem quæstionem, numerus 38. in duas partes, quarũ prior cum 73. faciat triplũ eius numeri, qui ex posteriori parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem esse 2. atq; adeo posteriorẽ 36. Facit autem prior cum 73. numerũ 75. at posterior cum 3. facit 39.

2.	M	T	23.
36.			15.
42.			42.

84.
diuisor.

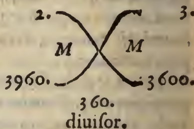
cuius triplus non est numerus 75. sed numerus 117. Defecimus ergo a veritate numero 42. Pone rursus priorem partem esse 23. ac proinde posteriorem 15. Prior autem cũ 73. facit 96. at posterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non est numerus 96. sed numerus 54. Excessimus ergo verũ numero 42. Operare secundũ regulam falsi, inuenies\'q; priorem partem esse $12\frac{1}{2}$. ac proinde posteriorem $25\frac{1}{2}$.

ITAQVE si numerus primus quæstionis propositæ est 3. secundus erit $12\frac{1}{2}$. & tertius $25\frac{1}{2}$. Ita enim primus cum 73. facit duplũ reliquorum duorũ, & secundus cum 73. facit triplũ reliquorũ duorũ. Si igitur tertius cum 73. faciat

quadruplum reliquorum duorum, soluta erit quæstio. Facit autem tertius cum 73. *numerũ* $98\frac{1}{2}$. *qui quadruplus non est numeri* $15\frac{1}{2}$. *sed numerus* 62. *Excessimus ergo verũ numero hoc* $36\frac{1}{2}$.

IAM vero si multiplices primos numeros per errores in crucem, item secundos, & tertios, (commodius enim inuenientur secundus, & tertius hoc modo, quàm si ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quòd opus esset quæstione præcedenti hic vti) & facta subtractione, residuos numeros diuidas per diuisorem inuentum $18\frac{1}{4}$. *nempe per differentiam errorũ, quòd in vtraq; positione factus est semper excessus, inuenies primum numerũ esse* 7. *secundũ* 17. *& tertiũ* 23. *Nam primus cum* 73. *facit* 80. *qui numerus duplus est reliquorum duorũ: at secundus cũ* 73. *facit* 90. *qui numerus triplus est duorum reliquorum. Tertius deniq; cum* 73. *facit* 96. *qui numerus reliquorum duorum quadruplus est.*

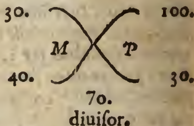
Quæstio 7. 7. *QVAERATVR numerus, quo multiplicato per* 3. *& producto additis* 10. *Et summa hac multiplicata per* 4. *productoq; additis* 20. *Sũma vero hac multiplicata per* 5. *et producto additis* 30. *Summa deniq; hac multiplicata p* 6. *productoq; additis* 40. *numerus producatur* 6700. *Finge numerum eum esse* 2. *qui multiplicatur per* 3. *facit*



facit 6. additis autem 10. *fiunt* 16. *Hac autem summa multiplicata per* 4. *fiunt* 64. *& additis* 20. *fiunt* 84. *Rursus hac summa multiplicata per* 5. *fiunt* 420. *additisq́;* 30. *fiunt* 450. *Hac deniq; summa multiplicata per* 6. *fiunt* 2700. *additisq́;* 40. *fiunt* 2740 *Debebat autem vltima hæc summa esse* 6700. *Defecimus ergo à veritate hoc numero* 3960. *Finge deinde eundem numerum esse* 3. *qui multiplicatus per* 3. *facit* 9. *additisq́;* 10. *fiunt* 19. *Hæc autem summa multiplicata per* 4. *facit* 76. *additisq́;* 20. *fiunt* 96. *Hæc rursum summa per* 5. *multiplicata facit* 480. *additisq́;* 30. *fiunt* 510. *Deniq; hæc summa multiplicata per* 6. *facit* 3060. *additisq́;* 40. *fiunt* 3100. *Debebant autem effici* 6700. *Defecimus ergo iterum a veritate numero hoc* 3600. *Operare secundum regulam, inueniesq́; numerum quæsitum esse* 13. *Hic enim numerus multiplicatus per* 3. *facit* 39. *additisq́;* 10. *fiunt* 49. *Hæc summa multiplicata per* 4. *facit* 196. *additis vero* 20. *fiunt* 216. *quę summa multiplicata per* 5. *facit* 1080. *additis autem* 30. *fiunt* 1110. *quę deniq; summa multiplicata per* 6. *facit* 6660. *additisq́;* 40. *fiunt* 6700.

8. *LVDIMAGISTER quidam tot habet discipulos, vt si singuli persoluant* 5. *aur. desint illi* 30. *aur. ad emendam domum, in qua habitat; si vero singuli dent* 6. *aur. supersint* 40. *aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet discipulos, & quantum est pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quàm numerus, qui multiplicatus per* 5. *talem procreet numerum, vt additis* 30. *ea-* Quæstio 8

dem summa fiat, quæ relinquitur, si idē numerus per 6. multiplicetur, & a producto detrahantur 40. Pone ergo, numerum discipulorū esse 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. addititijsq; 30. fiunt 180. Tanti ergo constabit domus, si 30. discipulos habeat, quorum singuli persoluāt 5. aureos. Videamus iam, an supersint vltra hoc pretium aur. 40. si singuli soluant 6. aur. Multiplicatus autē



idem numerus discipulorum 30. per 6. facit 180. nihilq; superest vltra pretium domus 180. aureorum: debebant autem superesse 40. aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rursus, numerum discipulorum esse 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additisq; 30. fiunt 530. Tāti ergo constabit domus, si 100. habeat discipulos, quorum singuli persoluant 5. aureos. Videamus iam, an supersint 40. aurei vltra hoc pretium, si singuli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus discipulorum 100. per 6. facit 600. supersuntq; 70. aurei vltra pretium domus 530. aureorum: debebant autem superesse tantū 40. Excessimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falsi, inueniesq; numerum discipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additisq; 30. fiunt 380. Tantum ergo est pretium domus. Idem numerus discipulorum

70.

70. multiplicatus per 6. facit 420. qui numerus superat pretiū domus 380. aur. hoc numero 40.

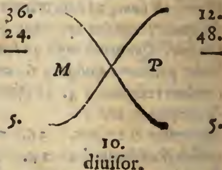
9. DVO inter se partiri debebāt æqualiter 60. aureos: Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita postea pace, primus deposuit $\frac{1}{4}$. *suæ pecuniæ, secundus vero* $\frac{1}{3}$. *factumq́; est tunc, vt tam primus accipiens* $\frac{1}{3}$. *secūdi, quàm secundus accipiens* $\frac{1}{4}$. *primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quisque primo rapuit? Pone primum rapuisse 36. aur. atque adeo secundum reliquos 24. Si igitur primus deponat* $\frac{1}{4}$. *nempe 9. aur. relinquentur ei 27. aur. quibus si addamus* $\frac{1}{3}$. *secundi, quam dicitur deposuisse, nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem solum habere 30. Excessimus ergo verum numero 5. Pone iam primum surripuisse 12. ac propterea secundum reliquos 48. Si igitur primus deponat* $\frac{1}{4}$. *hoc est, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus si addamus* $\frac{1}{3}$. *secundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare secundum regulam, inueniesq́; primum rapuisse 24. & secundum propterea 36. Nam si primus deponat* $\frac{1}{4}$. *nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat* $\frac{1}{3}$. *secundi, nēpe 12. habebit 30. aur. Sic etiam si secundus, deposita* $\frac{1}{4}$. *nempe 12. aur. reliquis 24. addat* $\frac{1}{4}$. Quæstio 9.

36.			12.
24.	P	M	48.
—			—
5.			5.
	10. diuisor.		

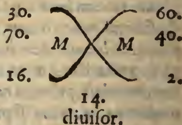
pri-

primi, id eſt, 6 aur. habebit 30. aur.

PORRO *ex poſitione ſecundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori poſitione, ſi ſecundus deponat* $\frac{1}{3}$. *nempe 8. aur & reliquis 16. adiũgat* $\frac{1}{4}$. *primi, hoc eſt, 9. aur. habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat* $\frac{1}{3}$. *nempe 16. aur. & reliquis 32. adijciat* $\frac{1}{4}$. *primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5. vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecũdi, &c. reperieſq́; ſcđm ſurripuiſſe 36. aur. & primũ 24.*



Quæſt. 10. 10. DVO *partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autẽ inter eos rixa, quilibet, quantũ potuit, arripuit. Cõpoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus* $\frac{1}{3}$. *ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit* $\frac{1}{5}$. *primus autẽ accepit hãc* $\frac{1}{5}$. *& ſecũdus illã* $\frac{1}{3}$. *quo facto vterq; habuit 50. Quantũ ergo quiſq; primo rapuit*

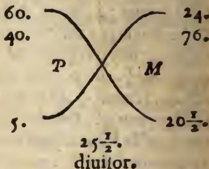


puit? Finge, primũ rapuisse 30. aur. ac pinde secũdum 70. Primi $\frac{1}{3}$. est 10. quã si deponat, relinquũtur illi 20. Secũdi $\frac{1}{5}$. est 14. quæ si detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat aũt habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rursus, primũ surripuisse 60. ac ppterea secundũ 40. Primi $\frac{1}{3}$. est 20. quã si deponat, supererũt ei aur. 40. Secundi $\frac{1}{5}$. est 8. quã si demus primo, habebit primus 48. Debebat aũt habere 50. Defecimus ergo in hac etiã positione à veritate numero 2. Operare p regulã, reperiesq́, primũ surripuisse $64\frac{2}{7}$. atq; adeo secundũ $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. est $21\frac{3}{7}$. quã si depõnat, remanebũt ei $42\frac{6}{7}$. Secũdi $\frac{1}{5}$. est $7\frac{1}{7}$. quã si deponat, supererũt ei $28\frac{4}{7}$. Iã vero si $\frac{1}{5}$. secundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur residuo primi, quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item si $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur residuo secundi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoque secundus 50. vt in quæstione proponebatur.

11. *DVO inter se ita distribuũt 100. aur. vt si primus deponat $\frac{1}{3}$. & secundus $\frac{1}{4}$. atq; aggregatum harũ partiũ bifariã secetur, deturq́, $\frac{1}{2}$. vtriq; numero relicto, numeri fiãt æquales, nempe 50. & 50. Quãtæ ergo sunt amborũ partes? Finge primi partem esse 60. ac pinde secũdi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nẽpe 20. remanẽt ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. secũdi, nẽpe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc est, ad 20. fiẽt 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirũ 15. demus residuo primi, qđ fuit 40. faciemus 55. Debebamus aũt facere tm̃modo 50. Excessimus ergo veritatẽ hoc numero 5. Finge deinde, primum habere* Quæst. 11.

bere

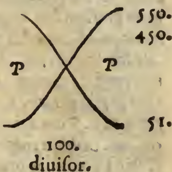
bere 24. ac proinde secundum 76. (Posui autem hosce numeros, quòd prior habeat $\frac{1}{3}$. & posterior $\frac{1}{4}$. sine fractionibus.) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. supersunt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$. secundi, videlicet 19 adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nempe ad 8. vt fiant 27. atq;



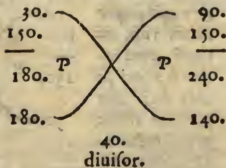
huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc est, $13\frac{1}{2}$. demus residuo primi, quod fuit 16. habebit primus $29\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate $20\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inueniesq; partẽ primi esse $52\frac{1}{1}\frac{6}{7}$. ac proinde secundi $47\frac{1}{1}\frac{}{7}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. est $17\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. quam si deponat, remanent ei $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. Secundi $\frac{1}{4}$. est $11\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. quam si deponat, supersunt ei $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. Aggregatũ autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. secundi, id est, ex $17\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. & $11\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. est $29\frac{7}{1}\frac{}{7}$. cuius $\frac{1}{2}$. videlicet $14\frac{1}{1}\frac{2}{7}$. adiecta ad residuum primi, hoc est, ad $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. & ad residuũ secundi, id est, ad $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. facit 50. & 50.

Quæst. 12. 12. *DIVIDATVR numerus 1000. in duas partes, quarum maior superet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem esse 600. ac proinde minorem 400. Superat autem illa hãc numero 200. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo veritatem numero 151. Fin*

ge deinde, maiorem partem esse 550. ac proinde minorem 450. Superat autem illa hanc numero 100. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo rursus veritatẽ numero 51. Operare secundum regulam, inuenicsque maiorem partem esse $524\frac{1}{2}$. ac propterea minorem $475\frac{1}{2}$. Illa enim hanc superat numero dato 49.

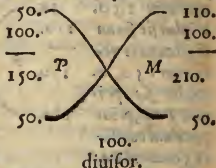


13. QVIDAM habet duo pocula aurea, & vnum cooperculũ 150. aureorum, quod additũ priori poculo facit eius pretium triplũ pretij posterioris poculi, additum vero posteriori poculo facit illud eiusdem pretij cum priori. Quanti ergo constant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorũ primus cum 150. triplus sit secundi, secundus vero cum 150. æqualis sit primo. Pone, prius poculum constare 30. aur. (Pono autem hunc numerum, quia, additis 150. fit numerus, qui habet Quæst. 13.



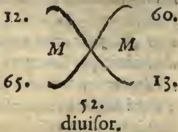
bet subtriplum sine fractione.) Addito cooperculo 150. *aureorum, constabit* 180. *aur. & quoniam pretium hoc triplum esse debet pretij posterioris poculi, constabit posterius poculum* 60. *aur. Addito cooperculo, constabit* 210. *Debebat autem constare tantum* 30. *vt eius pretium æquale esset pretio prioris. Excessimus ergo veritatē numero* 180. *Pone deinde, prius poculum constare* 90. *aur. Addito cooperculo* 150. *aureorum, constabit* 240. *aur. ac proinde posterius poculum constabit* 80. *aur. cum ille numerus huius sit triplus. Addito cooperculo, constabit* 230. *Debebat autē constare tantum* 90. *vt eius pretium prioris pretio esset æquale. Excessimus ergo etiam hic veritatem numero* 140. *Operare per regulam, inueniesque pretiū prioris poculi* 300. *aur. Addito enim cooperculo* 150. *aur. fiet pretium* 450. *aur. atque adeo pretium posterioris poculi erit* 150. *aur. sub triplum videlicet illius; additoq́; cooperculo, fiet pretium* 300. *aur. æquale pretio prioris.*

Quæst. 14. 14. *QVIDAM habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum* 100. *aureorū, quod additum priori poculo facit eius pretium triplū pretij posterioris, additum vero posteriori facit eius pretium duplū pretij prioris. Quanti ergo æstimantur duo illa pocula? Finge,*



ge, prius valere 50. aur. Addito cooperculo 100. aureorum, valebit 150. aur. ac proinde posterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus sit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non est pretij prioris, sed numerus 100. duplus est illius pretij. Excessimus ergo veritatem numero 50. Pone rursus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea posterius valebit 70. aur. cũ ille numerus huius sit triplus. Addito cooperculo valebit 170. aur. qui numerus duplus non est pretij prioris, sed numerus 220. eius duplus est. Defecimus ergo a veritate numero 50. Operare per regulam, inueniesq́; pretium prioris poculi 80. aur. Addito enim cooperculo 100. aureorum, fiet pretium 180. aur. ac proinde pretium posterioris poculi erit 60. aur. subtriplum videlicet illius; additoq́; cooperculo, fiet pretium 160. aur. duplũ pretij prioris, quod erat 80. aur.

15. *QVIDAM emit tot perdices, vt si emisset $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illarũ, & præterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cum 22. faciãt 100. Pone eum emisse 12. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 6. & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciunt 13. additisq́; 22. fiunt 35. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone secundo, eum* Quæst. 15.



emisse 60. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{1}{3}$. 20. et $\frac{1}{4}$. 15. quæ partes faciunt 65. additisq; 22. fiunt 87. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulam, inuenies q;, eum emisse 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. est 36. & $\frac{1}{3}$. 24. & $\frac{1}{4}$. 18. quæ partes conficiunt 78. additis autem 22. fiunt 100. quemadmodum propositum est.

Quæst. 16. 16. *DVO habent summam quandã aureorũ: si secũdus primo det 12. habebit primus sextuplo plus, quàm secundus: si vero primus det 15. secundo, habebit secundus decuplo plus, quàm primus. Quot ergo quisq; aureos habet? Hic quærun tur duo numeri, quorum primus cum 12. vnitatibus secundi sextuplus sit residui secundi, secũdus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus residui primi. Vt hanc, & similes quæstiones facilius sine fractionibus soluas, incipiendum erit à numero secundo. Finge ergo, secundum habere 20. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus, iuxta quæstionis pronunciationem, sextuplum residui secundi, quod est 8. Habebit ergo tunc primus 48. atque adeo, antequam 12. accepit à secũdo, habuit 36. Iam vero si ex hoc numero 36. primi dentur 15. vnitates secundo, habebit secundus 35. qui numerus decuplus esse debet, iuxta quæstionis tenorem, residui primi, quod est 21. Constat autem, numerum 35. non esse decuplum numeri 21. sed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rursus, secundum habere 100. ex quo si dentur 12. primo, habebit primus,*

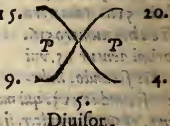
vt

vt vult quæſtio, ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 88. Habebit ergo tunc primus 528. atque adeo, antequã 12. accepit à ſecundo, habuit 516. Iam vero ſi ex hoc numero 516. primi dentur 15. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 115. qui numerus decuplus eſſe debet, vt quæſtio vult, reſidui primi, quod eſt 501. conſtat autem, numerũ 115. non eſſe decuplum numeri 501. ſed numerũ 5010. Defecimus ergo rurſus à veritate numero 4895. Operare per regulam, inueniesq́; ſecundum habere $17\frac{\ }{5}\frac{2}{9}$. *ex quo ſi detur 12. vnitates primo, habebit primus ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt* $5\frac{\ }{5}\frac{2}{9}$. *Habebit ergo tunc primus* $30\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. *ac proinde, antequam à ſecundo accepit 12. habuit* $18\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. *Si enim ex hoc numero dentur ſecundo 15. vnitates, habebit ſecundus* $32\frac{\ }{5}\frac{2}{9}$. *qui numerus decuplus eſt reſidui primi, quod eſt* $3\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. *vt quæſtio proponit.*

20.	M ✕ M	100.
175.		4895.
	4720.	
	diuiſor.	

17. D V O *habent ſummam quandam aureorũ: Si ſecundus det 6. primo, habet primus duplũ reſidui ſecundi; ſi vero primus ſecundo det 3, habebit ſecundus numerum æqualem reſiduo primi. Quot ergo aureos quiſq; habuit? Hic etiã quæruntur duo numeri, quorũ primus cũ 6. vnitatibus ſecũdi duplus ſit reſidui ſecundi, ſcd's vero cũ 3. vnitatibus primi æqualis reſiduo primi. Pone ſcd'm habere 15. ex quo ſi detur 6. vnitates primo, habe-* Quęſt. 17.

bit primus 18. duplum videlicet residui secundi, quod est 9. atque adeo, priusquàm acciperet 6. à secundo, habuit 12. Iam vero si ex hoc numero dentur 3. vnitates secundo, habebit secundus 18. qui numerus æqualis non est residuo primi, quod est 9. sed maior. Excessimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, secundũ habere 20. ex quo si dentur 6. vnitates primo



habebit primus 28. duplum videlicet residui secundi, quod est 14. Antequam ergo acciperet 6. à secundo, habuit 22. Iam vero si primus det secundo 3. vnitates, habebit secundus 23. qui numerus non est ęqualis residuo primi, quod est 19. sed maior. Excessimus ergo rursus veritatem numero 4. Operare per regulam, inuenies que, secundum habere 24. ex quo si dentur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplum residui secundi, quod est 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo si det 3. vnitates secundo, habebit secundus 27. qui numerus æqualis est residuo primi, quod etiam est 27.

Quæst. 28. 18. E S T *cisterna habens in fundo tres fistulas inæquales: per maximam reseratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimã in 6. Si ergo aqua semper æquabiliter effluat, quãto tempore effluet, si omnes tres fistulæ simul reserentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fistula in 2. horis euacuat 1. cisternã, quid euacuabit*

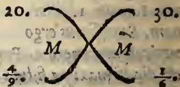
in 4. horis? inueniesq́; 2. cisternas. Item, Si media fistula in 3. horis euacuat 1. cisternam, quantum exhauriet in 4. horis? inueniesq́; 1 $\frac{1}{3}$. cistern. Item, Si minima fistula in 6. horis exhaurit 1. cisternam, quantum euacuabit in 4. horis? inueniesq́; $\frac{2}{3}$. cistern. atque ita omnes tres fistulæ in 4. horis euacuarent 4. cisternas. Nos autem volumus tantum 1. cisternam. Excessimus ergo veritatem numero 3.

4.	P	P	10.
3.			9
	6.		
	diuisor.		

Pone secundo in 10. horis, & dic Si maxima fistula in 2. horis exhaurit 1. cisternam, quantũ exhauriet in 10. horis? inueniesq́; 5. cisternas. Item si media fistula 1. cisternam euacuat in 3. horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperiesq́; 3 $\frac{1}{3}$. cistern. Item si minima fistula in 6. horis euacuat 1. cisternam, quid exhauriet in 10. horis? inueniesq́; 1 $\frac{2}{3}$. cistern. atque ita omnes tres fistulæ euacuarent in 10. horis 10. cistern. Nos autem volumus 1. cisternam. Excessimus ergo veritatem numero 9. Operare per regulam, inueniesq́; in 1. hora euacuari cisternam. Nam maxima fistula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. cisternam.

HAEC quæstio etiam ita proponi potest. Est cisterna habẽs in orificio tres cannales inæquales. Per maximum impletur cisterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6. &c.

Quæst. 19. 19. *EST cisterna habens fistulam in orificio, per quam impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fistulam, per quam euacuatur in 18. horis. Si igitur per superiorem continue influat aqua, & per inferiorẽ semper effluat, quanto tempore replebitur tota cisterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. cisterna, qd euacuabitur in 20. horis? inueniesq; $1\frac{1}{9}$. cistern. Necesse est ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. cistern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. cistern. maneat 1. cisterna repleta. Dic ergo. si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 20. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. cister.*



Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. cistern. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone secundo in 30. horis, & dic, Si in 18. horis euacuatur vna cisterna, quid euacuabitur in 30. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. cistern. Necesse est ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. cistern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{2}{3}$. cister. relinquatur 1. cisterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 30. horis? Inueniesq; $2\frac{1}{2}$. cister. Nos autem volumus $2\frac{2}{3}$. cistern. Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inueniesque in 36. horis cisternam impleri. Nam in 36. horis superior fistula implebit 3. cisternas; inferior autem exhauriet 2. cisternas; atque ita rema

nebit

nebit vna plena. Quæst. 20.

20. ARTIFEX quidam absoluit opus quoddam in 30. diebus; at si accedat alius, absoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore secundus hic solus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus absoluit opus, quantum absoluet in 18. diebus? inueniesq́; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore secundus absoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totum opus perficiant. Pone ergo primo secundum absoluere totum opus in 40. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantũ absoluet in 40. diebus? inueniesq́; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem posuimus eum absoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde secundum absoluere opus in 60. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum absoluet in 60. diebus? inueniesque $1\frac{3}{9}$. Nos autem posuimus eum absoluere 1. opus. Excessimus ergo veritatem hoc numero $\frac{3}{9}$. Operare per regulã, inueniesque secundum absoluere opus totũ in 45. diebus. Nã si in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, absoluet in 45. diebus 1. opus.

FACILIVS tamen sine regula falsi hæc quæstio soluetur hoc modo. Postquã inuenisti, secũdum in 18. diebus absoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt supersint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies Alia solutio huius quæstionis.

dies requirent? inuenieśq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic: Si $\frac{2}{5}$*. requirunt 18. dies, quot dies requiret 1. opus integrum? Inuenies nánque rursum 45. dies, vt prius.*

Quæst. 21. 21. *TRES inter se ita luserunt, vt statim primus lucratus sit* $\frac{1}{2}$*. pecuniæ secundi: postea vero secundus* $\frac{1}{3}$*. pecuniæ tertij: tertius denique* $\frac{1}{4}$*. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quisque ipsorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quisq; in ludũ attulit? Hic aliud nihil quæritur, quàm vt datus numerus 2100. (Si enim singuli habent 700. habebunt omnes tres 2100.) in tres partes distribuatur, ita vt, si prima det* $\frac{1}{4}$*. tertio, accipiat vero* $\frac{1}{2}$*. secũdæ: secũda aũt accipiat* $\frac{1}{3}$*. tertiæ, fiãt tres numeri æquales, nẽpe 700. 700. 700. Vel certe quærantur tres numeri, quorum primus deposita* $\frac{1}{4}$*. si accipiat* $\frac{1}{2}$*. scđi, faciat*

100. 200.
1250. 1100.
225. M 450.
525. 350.
175.
diuisor.

700. similiter scđs, deposita $\frac{1}{2}$*. cũ* $\frac{1}{3}$*. tertij faciat 700. eodemq; modo tertius, deposita* $\frac{1}{3}$*. cũ* $\frac{1}{4}$*. primi faciat 700. Pone primũ luforẽ attulisse 100. aur. Deposita* $\frac{1}{4}$*. nempe 25. supersunt ei 75. Et quia hoc residuum cum* $\frac{1}{2}$*. secundi debet facere 700. erit* $\frac{1}{2}$*. secundi 625. quòd hic numerus cum residuo primi, nempe cum 75. faciat 700. Attulit*

sit ergo secundus 1250. Postquam autem perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt ei 625. Quoniam vero residuū hoc cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertij 75: quòd hic numerus cum residuo secundi faciat 700. Quare tertius secum attulit in ludum 225. Postquam autē perdiderit $\frac{1}{3}$. supererunt ei 150. Et quia hoc residuum cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 25. facit 175. Debebat autem facere 700. defecimus propterea à veritate numero 525.

PONE *deinde, primum attulisse in ludum 200. aur. Deposita $\frac{1}{4}$. nēpe 50. supersunt ei 150. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. secundi facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$. secundi 550. aur. Attulit ergo secum 1100. Perdita autem $\frac{1}{2}$. supersunt ei 550. aur. qui cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{3}$. tertij 150. ac proinde in initio ludi habuit 450. Amissa autem $\frac{1}{3}$. remanent ei 300. aur. qui cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 50. faciunt 350. Debebant autem facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350. Operare per regulam, inuenies primum lusorem attulisse 400. aur. secundum 800. & tertium 900. Numeros porrò hos secundi & tertij inuenies vel ex regula falsi, multiplicando errores per secūdi ac tertij positiones, &c. vel ex primo inuento, quemadmodum paulo ante ex 100. & 200. quos numeros posuimus primum habere, numeros secundi, ac tertij inuestigauimus: Nam si primus habet 400. habebit (deposita $\frac{1}{4}$. nimirum 100. quam perdidit) 300. & quia cum $\frac{1}{2}$. secundi debet habere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 400. ac proinde secundus attulit 800. Amissa*

autē ½. supererunt ei 400. Quoniam vero hæc ½. cum ⅓. tertij facere debet 700. erit ⅓. tertij 300. proptereaq; tertius attulit 900. Amissa em ⅓. remanebunt ei 600. quibus si addatur ¼. primi, hoc est, 100. aur. habebit 700. vt q̄stio vult.

Quæst. 22. 22. TRES mercatores lucrati sunt 400. aur. quos, habita ratione pecuniæ, quam quisq; posuit, ita distribuerunt, vt secundi portio superaret portionē primi numero 12. tertij vero portio excederet portionē secundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiusque? Finge, primū accepisse 1. aur. (Volo enim quæstionem hanc soluere per minimos numeros, nempe per positionem 1. & 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falsi.) ac proinde secundum 13. & tertium 29. qui omnes numeri conficiunt 43. Debebant autē conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rursus, primum accepisse 2. aur. atq; adeo secundū 14. & tertium 30. qui omnes numeri conficiūt 46. Debebant autē conficere 400. Defecimus ergo etiā nunc a veritate numero 354. Operare per regulā, inueniesq; primi portionem esse 120. aur. secundi 132. & tertij 148. qui tres numeri conficiunt summam 400. aur. vt in quæstione proponitur:

1.			2.
13.			14.
29.			30.
—	M	M	—
43.			46.
357.			354.
	3. divisor.		

23. IMPERATORIS *exercitus contra turcas continet 40000. Germanorũ peditũ, tot vero Italos, & Hungaros, vt numerus Italorum sit* ½. *Germanorum, atq; Hungarorũ, numerus vero Hũgarorũ sit* ⅓. *Germanorum, atq; Italorum. Quantus ergo est Italorum, & quantus Hungarorũ numerus; atque adeo quantus totus exercitus?* Quæst. 23.

30000.	P	P	24000.
20000.			8000.
10000.			40000.
	30000. divisor.		

Finge, Italos esse 30000. Et quoniã hic numerus debet esse ½. *Germanorũ, atq; Hungarorũ, erunt Germani, atque Hũgari 60000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 20000. qui debent conficere* ⅓. *Germanorum, atque Italorum, nempe numeri 70000. Conficiunt autem* ⅓. *numeri 60000. Excessimus ergo veritatem numero 10000. Finge secundo; Italos esse 24000. Et quoniam hic numerus debet esse* ½. *Germanorum, atque Hungarorum, erunt Germani, atque Hungari 48000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 8000. qui debent conficere* ⅓. *Germanorum, atque Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem* ⅓. *numeri 24000. Excessimus ergo rursus veritatem numero 40000. Operare per regulam, invenies que Italos esse 32000. Hungaros vero 24000. ac proinde totum exercitum 96000. Nam hac ratione Itali conficiunt* ½.

Ger-

Germanorum, atq; Hungarorum, Hungari vero $\frac{1}{3}$. *Germanorum, atque Italorum, vt patet.*

Quæst. 24. 24. *VISVM EST hic apponere artificiũ illud Archimedis, quo, teste Vitruuio lib. 9. cap. 3. deprehendit furtum aurificis cuiusdam in corona aurea, hoc est, quantum argenti fuerit commistum, non dissoluta corona. Cum enim Hiero rex statuisset Dijs suis votiuam offerre coronam ex puro auro, aurifex, sublata auri portione, argenti tantundem commiscuit: Indignatus vero Hiero se contemptum, (vt verbis Vitruuij vtar) neque inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balneum, ibiq; cum in solium descenderet, animaduertit, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquæ extra solium effluere. Itaque cum eius rei rationem explicationis offendisset, non est moratus, sed exiliuit gaudio motus de solio, & nudus vadens domum versus significabat clara voce, inuenisse, quod quæreret. Nam currens identidem græce clamabat εὕρηκα εὕρηκα. Tum vero ex eo inuentionis congressu duas dicitur fecisse massas æquo põdere, quo etiã fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam; cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit: ita exempta massa, quanto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, vt eodem modo, quo prius fuerat, ad labra*

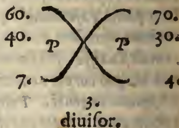
æquare-

æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta, eadem ratione mensura addita, inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quàm in auream eodem pondere massam, & ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, quàm in massa, ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus autem nos, quo pacto per regulam falsi furtum dictum deprehendi possit, si adhibeatur artificium illud Archimedis.

PONATVR exempli causa, coronam illam fuisse 100. lib. eaque imposita in vase effluxisse 65. lib. aquæ, imposita vero massa puri aurei 100. lib. effluxisse 60. lib. aquæ; imposita tandem massa puri argenti 100. lib. effluxisse 90. lib. aquæ. Finge ergo, aurificem abstulisse 40. lib. auri totidemq; libras argenti substituisse, ita vt in corona fuerint 60. lib. auri, & 40. lib. argenti. Vide iam, an corona ita confecta eijciat 65. lib. aquæ. quod ita scies. Dic. Si 100. lib. aur. eijciunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 60. lib. auri? Item si 100. lib. argenti expellunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 40. lib. argenti? inuenies; in vtraque operatione 36. lib. aquæ, ita

vt

vt corona eijciat 72.lib.aquæ. Debebat autē eijcere tantum 65.lib. Excessimus ergo veritatē numero 7. Finge secūdo, aurificem surripuisse 30.lib.auri, ac proinde in corona fuisse 70. lib.auri, & 30.lib.argēti. Dic ergo Si 100. lib.auri expellūt 60. lib.aquæ, quantū aquę



expellent 70. lib.auri? Item, si 100. lib.argenti eijciunt 90. lib. aquę, quantum aquæ eijcient 30. lib.argēti? inueniesq́, in priori operatione 42. lib. aquæ, in posteriori vero 27. quæ efficiunt 69. lib. aquæ. Debebant autem esse tantum 65. lib. Rursus ergo excessimus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesque, aurificem accepisse 16 $\frac{2}{3}$.lib.auri, atque adeo, coronam illam mixtam fuisse ex 83 $\frac{1}{3}$. lib.auri, & ex 16 $\frac{2}{3}$.lib. argenti. Quod vt probes, dic. Si 100.lib.auri eijciunt 60.lib.aquæ, quantum aquæ eijcient 83 $\frac{1}{3}$. lib.auri? Item, si 100.lib.argenti eijciunt 90.lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 16 $\frac{2}{3}$. lib. argenti? inueniesq́; in priori operatione 50.lib.aquæ, in posteriori vero 15. lib. aquæ, quæ omnes conficiunt 65.libras aquæ, quas posuimus coronam eijcere.

EODEM *modo deprehensum fuisset furtū, etiamsi massæ auri, & argenti non fuissent 100. lib. quot libras habebat corona, sed quotcunq; librarū, nempe auri 10.lib.v.g.& argenti 20. dūmodo diligenter exploretur, quantum aquæ singu*

læ

læ massæ eijciant. Nos ponamus, 10. lib. auri eijcere 6. lib. aquæ, at 20. lib. argenti eijcere 18. lib. aquæ. Vnde in priori positione dices: Si 10. lib. aur. eijciunt 6. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 60. lib. auri? &c.

SI ponatur corona 300. lib. & massæ auri, argentiq; totidem lib. hac cōditione, vt corona eijciat 218. lib. aquæ, aurum vero 206. lib. aquę, & argentum 230. lib. aquæ; inueniemus in corona fuisse 150. lib. auri, totidēque argenti. Vt patet in hisce duabus positionibus, in quarū priore statuuntur 100. lib. auri, & 200. lib. argenti: in posteriore autem 101. lib. aur. & 199. argenti, &c.

100.			101.
200.			199.
	P	P	
4.			$3\frac{2}{2}\frac{1}{5}$.
	$\frac{2}{2\ 5}$. diuisor.		

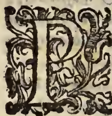
HOC ergo artificio deprehendetur in quacunque massa ex auro, argentoque commixta, quantum auri, quantumque argenti permixtum sit.

PRO-

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

Cap. XXIIII.

Progreſſio Arithmetica quid.



ROGRESSIO *Arithmetica eſt ſeries plurium numerorũ ſe æqualiter ſuperantium, vt hic.*

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.&c.

Progreſſio numerorum pariũ incipiens à 2.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28. &c.

Progreſſio naturalis numerorũ, & numerorũ impariũ pariumq; quid.

PRIMA enim harum trium progreſſionũ dicitur progreſſio naturalis numerorum, incipitq́, ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperãt vnitate. Secunda vero dicitur progreſſio numerorũ imparium, incipitq́, ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant binario. Tertia deniq; appellatur progreſſio numerorum parium, incipitq́, à 2. qui eſt

est primus numerus par, quemadmodum & 1. est primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licet improprie. In hac autem progressione numerorum parium omnes numeri se ordine superant etiam binario, quemadmodum et in progressione numerorum imparium. Eodem modo hic.

Aliæ progressiones.

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. &c.
4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. &c.

PRIOR namque harum progressionum incipit à 2. progrediturq́ per 3. cum omnes numeri in ea se ordine superent ternario: posterior vero incipit a 4. progrediturq́ per eundem numerum 4. cum in ea omnes numeri se ordine superēt quaternario.

CONTINVATVR quælibet progressio Arithmetica, si differentia, excessusve numero illi addatur, post quem progressio extendenda est: Vt si progressio hæc, 4. 9. 14. 19. 24. continuanda sit, addemus differentiam, siue excessum progressionis, nempe 5. (quam quidem differentiam, excessumve inueniemus, si primum progressionis numerum à secundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progressione subtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemusq́ 29. Huic iterum numero adijciemus 5. componemusq́ 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis pro-

Arithmetica pgressio quo pacto continuet.

Differētia pgressionis Arithmeticæ quō inueniatur.

progressionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, excessumve 6. addenda erunt 6. ad 7. vt fiant 13. pro secundo numero progressionis; Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero, & cet.

PARI ratione progressio Arithmetica continuatur retrocedendo, si differentia progressionis a minori extremo subducatur. Vt si progressio hæc 30. 37. 44. 51. 58. continuanda sit versus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rursus subducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rursus subducemus 7. vt supersint 9. à quibus rursus auferemus 7. vt supersint 2. à quibus amplius auferri nequeunt 7. ac propterea dicta progressio amplius non potest decrescere. Sic etiam, si quis progressionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. versus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rursus 4. ex 32. vt supersint 28. Item 4. ex 28. vt relinquantur 24. &c.

Progressio Arithmetica decresce re non pôt in infinitû.

Proprietas progressionis Arithmeticæ triû numerorum.

PROPRIVM est progressionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale sit duplo medij numeri, vt hic apparet, 7. 18. 29. demonstraturq́; à Iordano lib. 1. propos. 2.

Proprietas progressionis Arithmeticæ quatuor numerorum.

PROGRESSIONIS vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium est, vt aggregatum extremorum æquale sit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4. 12. 20. 28. demonstraturq́; à Iordano lib. 1. propos. 3. Atque hoc non solum

solum verum est in quatuor numeris sese cõtinuè eodem numero superantibus, quales sunt numeri in dato exemplo; sed etiam in quatuor, quæ non cõtinuè se superant eodẽ numero, dummodo eadẽ sit differentia inter primum, ac secundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides. 4.12.30.38.

EX his proprietatibus colligitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est impar, aggregatũ extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorũlibet ab extremis æqualiter distantium, nec non duplo medij numeri. Vt hic apparet.

Proprietas pgressionis Arithmeti cæ quotcũque terminorũ, si numerus terminorũ fuerit impar.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.

Cum enim quatuor hi numeri 3.7.39.43. *habeãt eandem differentiam, licet non continuatam (Nã eadem est differentia inter* 3. *&* 7. *quæ inter* 39. *&* 43.) *erit, ex ijs, quæ proxime diximus, aggregatum extremorum* 3. *&* 43. *æquale aggregato mediorum* 7. *&* 39. *Eadem ratione aggregatũ ex* 7. *&* 39. *æquale erit aggregato ex* 11. *&* 35. *quòd hi quatuor numeri* 7. 11. 35. 39. *habeant eandem differentiam, licet non continuatam: & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros* 19.23.27. *perueniamus; qui cum habeant eandẽ differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum* 19. *&* 27. *æquale duplo medij numeri* 23. *Eadem est ratio de omnibus alijs huius generis progressionibus Arithmeticis.*

Proprietas pgressionis Arithmeticę quotcunque terminorũ, si numerus terminorũ fuerit par.

EX posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatum extremorũ æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 15.19.23.27.*non autem tres tantũ, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulę ad Arithmeticas progressiones spectantes.*

REGVLA, I.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vnà cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatũ per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

Sũma cuiuscunq; progressionis Arithmeticę quo pacto inueniatur.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.37.

Ex 4.*&* 37.*fiunt* 41.*quæ multiplicata p numerũ terminorũ, hoc est, per* 12. *(Sunt enim* 12.*numeri*

in

in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademque ratio est de cæteris.

HAEC regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorũ est par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorũ: Si vero numerus terminorum est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino est par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorum est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum, efficiuntq; summam omnium numerorum 246. vt prius. In his autẽ duabus progressionibus, in quarum priore numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vltimo est par, ni-

Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.
4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.

S 2 *mirum*

mirum 42. in priore, & 38. in posteriore, multiplicant tam dimidium illius, nimirum 21. per 10. numerum terminorum, quàm dimidiũ huius, quod est 19. per 11. numerum terminorũ, vt in priori efficiant summam 210. & in posteriori 209.

RATIO harum regularũ hæc est. Quoniã supra diximus, quando numerus terminorum est par, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorũ ab extremis æqualiter distantium, fit, vt omnia aggregata simul sint tot, quot vnitates sunt in dimidio numeri terminorum. Quare si vnũ aggregatum, nempe extremorum, multiplicetur per dimidium numeri terminorum, producetur summa omnium aggregatorum. Rursus quia docuimus, quando numerus terminorum est impar, aggregatum extremorum esse æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium, necnon duplo medij numeri, fit, vt medius numerus sit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata simul, vnà cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot sunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorũ, producetur summa omnium terminorum.

ITAQVE, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum numero terminorũ, ad eliciẽdam summam totius progressionis, etiamsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito,

vnà

vnà cum numero terminorum, & differentia progressionis, vltimus terminus inuestigetur, sequenti regula explicabimus.

Particularis inuētio summæ progressionis naturalis numerorū

IN progressione autē naturali numerorum, quæ ab 1. incipit, inuenietur breuissime summa omnium terminorum, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui semper indicat numerum terminorum) per numerum proxime maiorē. Huius enim numeri producti dimidium est summa omnium terminorum. Vt hic.

Numerus terminorū pgressionis naturalis numerorū est vltimus terminus.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerum proxime maiorem producitur numerus 132. cuius dimidium 66. est summa totius progressionis. Sic etiam in hac progressione.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11. numerum proxime maiorem fit numerus 110. cuius dimidium 55. est totius progresfionis summa.

ITAQVE si quis velit summam progressionis naturalis, quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirū sint 100. termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus, in quo progressio dicitur terminari, vt hic numerus 100. per numerū pxime maiorē, vt hic p 101. Nam producti numeri (qui hic est 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exemplo, erit summa dictæ progressionis. Eademq; ratio est in alijs.

Alia inuentio summæ progressionis naturalis numerorũ.

ALII hanc etiam regulã distrahunt in duo membra, hoc modo. Si vltimus numerus est par, multiplicant numerum proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero est impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vt in posteriori progressione naturali, multiplicant 11. *numerum proxime maiorem vltimo numero per* 5. *dimidium vltimi numeri, faciuntq́,* 55. *summam totius progressionis, vt prius. In priori autem progressione naturali, multiplicant* 11. *vltimum numerum per* 6. *dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntq́,* 66. *summam totius progressionis, vt prius.*

Particularis inuẽtio summæ numerorũ imparium.

IN progressione quoque numerorum imparium, quæ ab 1. *incipit, inuenietur facillimo negotio summa omnium terminorum, si numerus terminorum in seipsum multiplicetur, vt hic.*

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui est 10. *in seipsum procreatur numerus* 100. *qui est summa totius progressionis.*

Numerus terminorũ in progressione numerorũ impariũ quo pacto reperiatur.

HABETVR autem numerus terminorũ, si vltimo numero adijciatur 1. *& compositi numeri dimidium sumatur, vt in dato exemplo, si addatur* 1. *ad* 19. *fit numerus* 20. *cuius dimidiũ* 10. *indicat numerum terminorum.*

ITAQVE si quis velit summam progressionis

ſionis numerorum imparium, quæ terminetur in quouis dato numero vt in 67. addēda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progreſsio termina ri dicitur, vt hic ad 67. Nam compoſiti numeri (qui hic eſt 68.) dimidium, nempe 34. in dato exemplo, dabit numerū terminorum: qui in ſe multiplicatus producet ſummam illius progreſsionis. Vt in propoſito exemplo, in quo ponuntur 34. ter mini, ſi multiplicetur numerus 34. in ſe, procreabitur ſumma illius progreſsionis 1156. Atque ita de cæteris.

IN progreſsione denique numerorum pariū, quæ à 2. incipit, nullo etiā labore reperietur ſumma, ſi dimidium vltimi numeri, quod ſemper indicat numerum terminorum progreſsionis, (ſemper enim tot ſunt termini progreſsionis eiuſmodi numerorum parium, quot ſunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

Particularis inuētio ſummę nūmerorū parium.

Numerus terminorū in pgreſſione numerorum pariū qua ratione inueniatur.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus eſt dimidiū vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13. numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156. hoc eſt, ſumma omnium illorum numerorum parium.

ITAQVE ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorū parium, quæ terminetur in quoli bet dato numero vt in 100. multiplicādus erit numerus, qui dimidiū conficit numeri vltimi dati, in

quo dicitur terminari progreſsio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidiũ eſt vltimi numeri dati 100.) per numerum proxime maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim nume rus vt 2550. in dato exemplo, erit ſumma illius progreſsionis; & numerus terminorum erit 50. in eodem exemplo, quot nimirum vnitates ſunt in dimidio vltimi numeri. Et ſic de alijs.

REGVLA II.

Vltim' terminus cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto eliciat ex numero terminorũ vnà cũ primo termino, & differentia progreſſionis,

SI in quauis progreſsione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum, vnà cum primo termino, & differentia progreſsionis, inueniemus vltimũ terminũ, etiamſi intermedios terminos nõ habeamus, hoc modo. Ex numero terminorũ abijciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandẽ huic producto primus ter minus edijciatur. Numerus enim compoſitus erit vltimus terminus. Vt ſi primus terminus alicuius progreſsionis ſit 3. numerus autem terminorũ ſit 10. & differentia 8. cognoſcemus decimũ terminum, hoc eſt, vltimum huius progreſsionis ſine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero termino rum auferemus 1. & reliquum numerũ 9. multiplicabimus per 8. differentiam progreſsionis, producto tandem numero 72. adijciemus 3. primum terminum. Compoſitus enim numerus 75. eſt deci mus terminus progreſsionis, cuius primus terminus eſt 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3.11.19.27.35.43.51.59.67.75.

ITAQVE si quis hanc quæstionem proponat. Augias Herculi de numero boũ, quos habebat, interroganti respõdit, boues suos omnes per loca 40. ita esse dispositos, vt quoties in primo loco continẽtur 3. boues, toties in secũdo contineantur 5. in tertio toties 7. in quarto toties 9. &c. Accessit Hercules ad primũ locũ, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, et quot boues in vltimo loco fuerũt? soluenda erit hoc modo. Quoniã in primo loco sunt decies 3. boues, erũt in secundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nẽpe 70. & sic deinceps, vt sit progressio quędam Arithmetica, cuius primus terminus sit 30. differẽtia vero 20. & numerus terminorũ 40. Eliciẽdus ergo est primùm vltimus terminus per proximã regulã, hoc modo. Ex 40. numero terminorũ abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiã multiplicetur, productoq́; numero 780. primus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, siue quadragesimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco. Q. ō de bobus Augię.

DEINDE vero ex hoc vltimo termino inuento, ex primo dato, vnà cũ differẽtia eruenda ꝑ primã regulã summa totius progressionis, etiamsi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur, compositusq́; numerus 840. per 20. hoc est, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namq; numerus 16800. est summa totius progressionis, atque adeo nume-

rus,

rus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in singulis locis fuerint, atq; adeo in vltimo loco fuisse 810. apposuimus hic totam progressionem.

30. 50. 70. 90. 110. 130. 150. 170. 190. 210.
230. 250. 270. 290. 310. 330. 350. 370. 390. 410.
430. 450. 470. 490. 510. 530. 550. 570. 590. 610.
630. 650. 670. 690. 710. 730. 750 770. 790. 810.

Quæstio de ducibus militiæ.

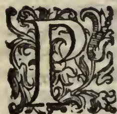
S I M I L I S *erit quæstio, si quis ita dicat. Imperator strenuis ducibus numero 20. distribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hostilem transcẽderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodem modo progrediendo. Quanta ergo fuit ea summa pecuniæ, & quantũ, qui primus murum transcendit, accepit? Si namque ex 20. numero terminorum (tot enim sunt termini in illa progressione, quot sunt duces.) auferas 1. & reliquum numerum 19. multiplices per 30. differentiã progressionis, productoq́; numero 570. adijcias primũ numerũ, nempe 100. efficies 670. pro vltimo progressionis termino: atq; tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino, si ei addatur primus, nimirum 100. vt fiant 770. atque hic numerus per 10. dimidium numeri terminorum multiplicetur, fiet summa omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit summa pecuniæ distributæ. Tota vero progressio ita se habet.*

100. 130. 160. 190. 220. 250. 280. 310. 340. 370.
400. 430. 460. 490. 520. 550. 580. 610. 640. 670.

PRO-

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

Cap. XXV.



ROGRESSIO Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium, vt hic apparet. Progressio Geometrica quid.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. &c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. &c.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536. &c.

PRIMA enim harum progressionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atq; vtraque harũ progressionum ab 1. incipit; tertia denique per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1. sed à 3. initium sumit.

CONTINVATVR quælibet progressio Geometrica; si per denominatorem proportionis numerus ille, post quem progressio extendenda est, multiplicetur. Vt si progressio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36. continuanda sit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3. Geometrica progressio quo pacto continuetur.

de-

Denominator proportionis in progressione Geometrica quomodo inueniatur.

denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus, si secundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadem progressione.) efficiemusq́; 108. Hunc iterum numerum per 3. multiplicabimus, producemusq́; 324. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7. & progredi per proportionẽ quincuplam, cuius denominator est 5. multiplicanda erunt 7. per 5. vt fiant 35. pro secundo numero progressionis. Item 35. per 5. vt fiant 175. pro tertio numero, &c.

PARI *ratione progressio Geometrica continuatur retrocedendo, si minus extremũ per denominatorem diuidatur. Vt si progressio hæc 64. 128. 256. 512. continuanda sit versus minores numeros, cum denominator proportionis sit 2. diuidemus 64. per 2. faciemusq́; 32. quæ rursum partiemur per 2. inueniemusq́; 16. & sic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.*

512. 256. 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. etc.

Progressio Geometrica decrescit in infinitum.

Et nũquam erit finis huius decrementi in progressione Geometrica. Sic quoque, si quis progressionẽ inchoare velit à 100. & progredi versus vnitatem per proportionem sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. diuidemus 100. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $44\frac{4}{9}$. &c.

PROPRIVM *est progressionis Geometri-*

ca

cæ trium numerorum, vt numerus qui ex primo numero in tertium producitur, æqualis sit numero, qui ex medio fit in seipsum multiplicato. Vt hic apparet, 3.9. 27. demonstraturq́, ab Euclide lib.7. propos. 20. Proprietas pgressiõis Geometricæ triũ terminorum.

PROGRESSIONIS *vero Geometricæ quatuor numerorum proprium est, vt numerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartum fit, æqualis sit numero, qui ex secundo in tertium procreatur. Vt hic vides, 2.6.18.54. demonstraturq́, ab Euclide lib.7.propos.19. Atque hoc nõ solum est in quatuor numeris continue proportionalibus, quales sunt quatuor numeri in dato exẽplo, sed etiam in quatuor, qui non sunt continue proportionales, dummodo eadem sit proportio secundi ad primum, quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis, 3.6.10.20.* Proprietas progressionis Geometricæ quatuor terminorum.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est impar, numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter se, æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium producitur, necnon numero, qui ex medio in seipsum fit. Veluti hic apparet. Proprietas progressionis Geometricæ quotcunq; terminorũ, si numerus terminorũ sit impar.

3.6.12.24.48.96.192.384.768.

Cum enim quatuor hi numeri 3.6.384.768. habeant eandẽ proportionẽ, licet non continuã, erit, ex ijs, quæ proxime diximus, numerus, qui fit ex

3.in

3.in 768. æqualis ei, qui fit ex 6.in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6.in 384. æqualis erit ei, qui ex 12.in 192. producitur, quòd hi quatuor numeri 6.12.192.384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, si plures sint, donec ad tres medios 24. 48. 96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in seipsum gignitur. Eademq; ratio est de omnibus alijs huiusmodi progreßionibus Geometricis.

Proprietas pgreßionis Geometricæ quotcũque terminorũ, si numerus terminorum sit par.

EX posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progreßione Geometrica, cuius numerus terminorum est par, numerum ex multiplicatione extremorũ productum æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium producitur. Vt hic manifestum est.

3.6.12.24.48.96.192.348.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 12. 24. 48. 96. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Sequuntur iam regulæ ad progreßiones Geometricas spectantes.

RE-

REGVLA I.

SI in quauis progreſsione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vnà cũ minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionẽ ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor ſit, quàm denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, ſiue maius extremum adijciatur, componetur ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſsione. Summa cuiuſcũq; progreſsionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

3.12.48.192.768.3072.12288.49152.

Demptis 3. ex 49152. remanẽt 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quã habent numeri datæ progreſsionis, eſt 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, ſiue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemuſq; ſummam totius progreſsionis 65535. Item hic.

$4.6.9.13\frac{1}{2}.20\frac{1}{4}.30\frac{3}{8}.45\frac{9}{16}.$

Subtractis 4. ex $45\frac{9}{16}$. *relinquuntur* $41\frac{9}{16}$. *quæ ſi diuidantur per* $\frac{1}{2}$. *(Eſt enim* $1\frac{1}{2}$. *denominator proportionis ſeſquialteræ, quam habent numeri huius progreſsionis, ablata autem* 1. *remanet* $\frac{1}{2}$.*) fiet Quotiẽs* $83\frac{1}{8}$. *cui ſi addatur vltimus numerus, ſiue maius extremum* $45\frac{9}{16}$. *fiet ſum*

ma

ma totius progreſsionis $128\frac{11}{16}$. *atq; eodem modo ſummam cuiuſcunque progreſsionis Geometricæ inueniemus.*

I T A Q V E, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam ſummā totius progreſsionis, etiamſi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire poſsimus, licet non contineuetur tota progreſsio, ſequenti regula explicabimus.

Particularis iuuētio ſummæ ꝓgreſſionis proportionis duplæ cuius initium eſt 1,

I N progreſsione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium eſt 1. facillimo negotio ſumma totius progreſsionis quotcunque terminorum reperietur, ſi vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.

In progreſſione ꝓportionis duplę incipiē te ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma oīum antecedentium numerorum.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024. reijciatur 1. habebitur ſumma totius progreſsionis 1023.

E X quo fit, quemlibet numerum in huiuſmodi progreſsione, abiecta prius vnitate, eſſe ſummā omnium numerorum antecedentiū, cum quilibet numerus ſit proxime præcedentis numeri duplus.

R E G V L A II.

IN omni progreſsione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus ſeipſum multiplicans gignit

gignit numerum, qui ab eo abest tanto interuallo, quanto ipse ab vnitate distat: quiuis autem numerus alium maiorem multiplicans producit numerũ, qui à maiore tãto interuallo distat, quãto ipse minor ab vnitate abest. Hæc regula clarissime ex propos. 11. lib. 8. Euclidis colligitur, vt in scholio eiusdẽ propos. declarauimus. Exẽpli gratia in hac ꝓgressione duplę proportionis, quæ sequitur,

Si in progressione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis seipsum, vel aliũ numerum multiplicet, quẽ locum numerus productus occupet.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.

si numerus 16. qui quintum locum ab vnitate occupat, in seipsum multiplicetur, producetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonum. Sic quoque si numerus 32. sextum locum ab vnitate occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui sextum etiam locum à numero 32. occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicans numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 64. reponendum.

Quilibet numerus in ꝓgressione Geometrica incipiẽte ab 1. seipsum multiplicãs producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm numerus multiplicans, ponẽdum.

ITAQVE hanc licebit regulam colligere. Si in progressione Geometrica, cuius initiũ est 1. numerus aliquis quemcunque locũ occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt si numerus seipsum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: si occupet septimum locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponendus, &c. Id quod

aperte ostensum est in progressione superiori proportionis duplæ, idemq; clarissime in hac altera progressione proportionis quadruplæ apparet.

1.4.16.64.256.1024.4096.16384.65536.

Nam si numerus 64. in quarto loco positus, seipsum multiplicet, gignetur numerus 4096. in septimo loco ponendus. Ita quoque numerus 256. quintum occupans locum seipsum multiplicans producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Progressio naturalis numerorũ quo pacto subscribenda sit progressioni Geometricæ, ut inde cognoscatur, quo in loco quilibet numerus productus sit collocandus, in progressione Geometrica incipiente ab 1.

UT autem facilius sciatur, quo in loco quilibet numerus productus sit collocandus, subscribenda est progressioni Geometricæ progressio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc est, sub primo numero, scribatur 0. sub secundo numero ponatur 1. sub tertio 2. sub quarto 3. & ita deinceps, ut in hac progressione proportionis duplæ factum est.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Nam quilibet numerus progressionis Geometricę seipsum multiplicans producit numerum supra illum numerum progressionis naturalis numerorum collocandum, qui duplus est illius, qui subscribitur numero seipsum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerũ supra illum numerũ progressionis naturalis numerorũ reponendũ, qui componitur ex duobus nume-

ris, qui numeris multiplicantibus subſcribuntur. Vt ſi numerus 32. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 1024. ſupra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus ſit numeri 5. qui numero 32. ſubſcribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. ſupra 11. reponendus, quod numerus 11. componatur ex 3. & 8. qui numeri ſub 8. & 256. ſcripti ſunt.

ET quoniam, quot vnitates ſunt in quolibet numero progreſsionis naturalis numerorum, talē locū vno amplius occupat in progreſsione Geometrica numerus illi ſuprapoſitus, vt in ſuperiori exemplo perſpicue apparet; facile inueniemus numerum cuiuſq; loci in progreſsione Geometrica, etiãſi nõ ſcribamus omnes numeros intermedios. Sit enim inueniendus, verbi gratia, numerus in vigeſimo loco ſupradictæ progreſsionis collocandus. Primum ſcribo quatuor, aut quinque, vel plures numeros progreſsionis, vnà cum progreſsione naturali, vt hic vides.

Quo pacto numer⁹ cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermedijs.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Deinde multiplico. v. g. 8. in ſe, facioq́; 64. numerum ſeptimi loci, ſub quo nimirum poſitus eſt numerus 6. vna vnitate minor numero locorū; quòd numerus 3. ſub 8. duplicatus faciat 6. Quòd ſi multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, ſub quo nimirum ſcriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorum, quòd

numeri 3. & 6. ſub quarto & ſeptimo loco faciant 9. Rurſus ſi 512. numerum decimi loci, ſub quo ponitur numerus 9. multiplicemus in ſe, producemus numerum 262144. in loco decimonono ſcribendum, ſub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorũ, propterea quòd numerus 9. ſub decimo loco duplicatus facit 18. Iam vero quia ex 18. qui numerus ſub demonono loco ſcribitur, & ex 1. ſub ſecundo loco poſita fiunt 19. ſi multiplicemus numerum 2. ſupra 1. poſitum per numerum 262144. ſupra 18. poſitum, conficiemus numerum 524288. in viceſimo loco, ſub quo videlicet numerus 19. ponitur, ſcribendum.

RVRSVS, ſi quis velit in eadem progreſſione numerum in decimooctauo loco reponẽdum, multiplicabimus numerum 32. ſub quo ponuntur 5. in ſeipſum, producemuſque numerum 1024. in vndecimo loco ſcribendum, ſub quo numero ponitur numerus 10. qui duplus eſt numeri 5. Et quoniam ex 10. qui numerus ſub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur ſub ſeptimo loco, fiunt 16. qui numerus ſub loco decimoſeptimo ſcribitur, ſi numerum 64. ſeptimi loci per numerum 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerum 65536. loci decimiſeptimi. Tandẽ qa ex 16. qui numerus ſub decimoſeptimo loco ponitur, et ex 1. quæ ſub ſecũdo loco ponitur, fit numerus 17. qui ſub decimooctauo loco ſcribitur; ſi multiplicemus numerum inuentũ 65536. decimiſeptimi loci per numerum 2. ſecundi loci,

gignemus numerum 1 3 1 0 7 2. in loco octauodecimo scribendum, sub quo videlicet ponitur numerus 17.

HAEC omnia quadrant etiam in progressionem quamcunq; Geometricam non ab 1. sed à quouis alio numero incipientem, dummodo quemlibet numerum ex multiplicatione productum diuidamus per primum numerum progressionis. Quotiens enim erit numerus quæsitus. Vt in hac progressione proportionis duplæ apparet. Nam si

Quę dicta sũt in hac regula de progressione Geometrica incipiente ab 1. vera etiã esse de progressione Geometrica incipien te non ab 1. sed ab alio numero.

5.	10.	20.	40.	80.	160.	320.	640.	1280.	2560.	5120.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

numerus 80. quintũ locum à primo numero occupans in scipsum multiplicetur, pro creabitur numerus 6400. quo diuiso per primum numerum, vtpote per 5. fiet Quotiens 1280. in quinto loco à numero 80. collocandus, nempe in nono loco, sub quo ponitur numerus 8. qui duplus est numeri 4. sub numero 80. multiplicante positi. Vbi vides, numerum 80. quinti loci, cũ seipsum multiplicat, producere numerum, quo diuiso per primum numerum progressionis, fit Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, reponendus. Sic etiam, si numerus 40. quarti loci multiplicet numerũ 640. & productus numerus 25600. per primũ numerũ 5. diuidatur, fiet Quotiens 5120. quarto loco à numero 640. scribẽdus, nẽpe loco vndecimo, sub quo ponitur numerus 10. cõflatus ex 3. sub 40. &

ex 7. *sub* 640. *Quòd si numerum* 1280. *multiplicemus per* 5120. *procreabimus numerum* 6553600. *quo diuiso per primum numerum* 5. *reperiemus Quotientem* 13172 0. *reponendum in loco decimonono, qui nimirũ vnitate superat numerum* 18. *conflatum ex numeris* 8. *ac* 10. *positis sub numeris multiplicantibus.*

ITA quoque (vt in alia progressione exemplum etiam ponamus.) in hac progressione propor

2.	14.	98.	686.	4802.	33614	235298.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

1647086.	11529602.	80707214.
7.	8.	9.

tionis septuplæ, si numerus 4802. *quintum locum à primo numero occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus* 23059204. *quo diuiso per primum numerum, nempe per* 2. *fiet Quotiẽs* 11529602. *in quinto loco à numero* 4802. *locandus, in nono videlicet loco, sub quo numerus* 8. *ponitur. Sic etiam, si numerus* 98. *tertij loci multiplicet numerum* 1647086. *& productus numerus* 161414428. *per primum numerum* 2. *diuidatur, fiet Quotiens* 80707214. *tertio loco à numero* 1647086. *scribendus, nimirũ loco decimo, sub quo ponitur numerus* 9. *conflatus ex* 2. *sub* 98. *& ex* 7. *sub* 1647086. *&c.*

EX his facile inueniemus numerum cuiusque loci. Si namque in priori progressione inuenien-

dus

dus sit numerus tricesimo loco ponendus, multiplicabimus numerum 5120. in se, producemusque numerum 262144 00. quo diuiso per 5. fiet Quotiens 524288 0. ponendus loco vicesimo primo, qui videlicet vnitate superat numerum 20. qui duplus est numeri 10. sub 5120. positi, poniturque sub vicesimo primo loco. Et quoniam 20. & 9. faciunt 29. si numerum 5242880. vicesimi primi loci, sub quo numerus 20. ponitur, multiplicemus per 2560. sub quo numerus 9. scribitur, efficiemus numerum, quo diuiso per 5. fiet Quotiens 268435456 0. locandus in loco tricesimo, qui nimirum vnitate superat conflatum illum numerum 29.

Quo pacto numer' cuiuscunq; loci in pgressione Geometrica incipiente à quouis nu⁼ro inuestiget fine intermedijs numeris.

VIDES *igitur, nos reperire posse extremum numerum cuiuslibet progressionis Geometricæ, etiam si non scribantur omnes numeri intermedij illius progressionis: pluribus tamen operationibus, quàm supra in secunda regula progressionum Arithmeticarum adhibuimus.*

QVONIAM *vero in prima regula diximus, numerum quemcunque in progressione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, summam esse omnium antecedentium numerorum; in hac autem secunda regula docuimus, quemlibet numerum progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, si seipsum multiplicet, gignere numerũ in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri se multiplicantis, ponendum: fit, vt si summæ quotcunque numerorum progressionis Geometricæ pro-*

Summma quotcunq; terminorũ progreſſionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1. incipiẽtis, additâ prius vnitate, ſeipſam multiplicãs ꝓducit numerũ, qui, abiectâ prius vnitate, ſumma eſt duplo pluriũ terminorũ

portionis duplæ ab 1. incipientis addatur 1. & aggregatum in ſeipſum multiplicetur, producatur ſumma, abiecta prius vnitate, duplo plurium numerorũ eiuſdem progreſſionis: quia prior ſumma, addita vnitate, conſtituit proxime ſequentem numerum in eadem progreſſione, qui numerus ſeipſum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, reponendum; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus ſumma erit omnium antecedentium numerorum, qui quidem duplo plures ſunt, quàm priores, quorum ſumma accepta fuit. Exempli gratia, ſumma ſeptem terminorum, addita vnitate, conſtituit octauum terminum, qui multiplicatus in ſe producit terminum decimumquintum, nempe numerum in duplo maiore loco, quàm ſit octauus, minus vnitate, ponendum; qui quidem, abiecta vnitate, ſumma erit quatuordecim antecedentium terminorum, nimirum duplo plurium, quàm ſeptem, quorum ſumma accepta fuit. Eademque ratio eſt de cæteris.

Quo pacto facile inueniatur ſumma 64. locorum progreſſionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis.

I T A Q V E ſi quis breuiter cupiat inuenire ſummam 64. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, quot nimirum loca ſunt in ludo latrunculorum, quem ſcacchiorum ludum vocant, accipienda erit primum ſumma horum quatuor terminorum 1. 2. 4. 8. nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatum 16. in ſe. Si enim ex numero producto 256. abijciatur 1. erit ſumma octo terminorũ 255. Rurſus, addita 1. multiplicandum aggregatum

tum 256.in se, vt fiant 65536. ac proinde summa 16. terminorum 65535. Quòd si rursus, addita 1. aggregatũ 65536. in se multiplicetur, procreabitur numerus 4294967296. qui, abiecta prius vnitate, dabit summam 32. terminorum. Postremo si 4294967296. in se multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit summã 64. terminorum. Atque tot quatrini requiruntur, vt quis replere possit omnia 64. loca dicti ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinum in primo loco; 2. quatr. in secũdo; 4. in tertio; 8. in quarto, & sic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos, (tribuẽdo singulis aureis 400. quatrinos) 46116860184273879 $\frac{3}{80}$. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiã pluribus, aut toto mũdo, reperitur; quod multis incredibile videtur. Quanta pecunia requiratur, vt impleantur 64. loca ludi latrunculorũ, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in secundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionem duplã

IMMO vix tot grana frumenti in vniuerso orbe terrarum existunt, quot in dictis 64. locis continerentur, si in primo poneretur 1. granum, in secundo 2. in tertio 4. &c. quod ita perspicuum faciemus, licet multis omnino incredibile videatur. Secũdum Medicos, & pharmacopolas, grana 60. efficiunt 1. drachmam, id est, $\frac{1}{8}$. vnius vnciæ; ac proinde 480. grana 1. vnciam, & 5760. grana 1. libram. Cum ergo 600. libræ communiter constituant 1. mensuram, quam Romani Rubium dicũt, & quæ parum ab illa mẽsura differt, quam Nautæ in Italia Salmam appellant; constabit 1. Rubius granis 3456000. Quare si grana 18446744073709551615. quæ in dictis 64. lo- Quot grana frumenti constituant vnũ Rubium.

cis

cis continetur, per grana 3456000. vnum Rubium constituentia diuidantur, prodibunt Rubij 533759983465. & paulo amplius: quot vix in toto terrarum orbe arbitror simul reperiri. Nam cũ cõmuniter nauis oneraria ferat Rubios 3000. requirerentur, vt minimum, ad frumentum illud portandum naues. 177919985 2. ad quas onerandas vix satis esse totius mundi frumẽtum, facile sibi quiuis persuadebit. Quòd si in toto mũdo vix sunt 18446744073709551615. grana frumẽti, multo minus tot quatrini existent, etiãsi omnes monetæ in quatrinos resoluerentur: cum nulli dubium sit, maiorem in mundo frumenti esse copiam, quàm pecuniæ. Quod etiam hinc colligi potest.

Quot naues requirãtur ad ferẽdũ frumentũ in 64. locis ludi latrunculorũ positum.

QVONIAM ducatus aureus Romæ æstimatur baiochis 115. siue quatrinis 460. si quatrini 18446744073709551615. in dictis locis 64. contenti diuidãtur per baiochos 115. hoc est, per quatrinos 460. efficiẽtur ducati aurei 40101617551542503. & paulo amplius. Quia vero 100. ducati aurei faciunt 1. libram, continebũt 1800000. libræ aureos ducatos 180000000. quot nimirum commode vna nauis oneraria ferre potest, cum rubij frumenti 3000. vnam nauem onerantes faciant libras 1800000. quod pondus multis partibus superat Obeliscum illum immensum, qui Romæ iuxta templum S. Petri visitur; quippe cum hic, vt periti affirmarunt, contineat libras duntaxat 1180000. quem tamen vix ferri posse ab vna naue, facile sibi persuadebit, qui eius

molem

molem diligentius intueatur. Quod ideo dixerim, ne quis putet, parum nos vni naui tribuere, cum ei concedimus libras 1800000. *hoc est, rubios frumenti* 3000. *siue aureos ducatos* 18000000. *Ex fit, ad aureos ducatos* 40101617551542503. *uehendos necessarias esse naues* 222786764. *& amplius: quis autem dubitet, totius mūdi pecuniā etiamsi ad aureos ducatos reducatur, tantam non esse, vt tot naues oneret?*

Quot naues requirantur ad ferendā pecuniam in 64. locis ludi latrūculorum positā, si ad aureos reduceretur.

QVOD si quis in primo loco ponat 1. *quatrinum, vel granum;* 2. *in secundo;* 6. *in tertio;* 18. *in quarto;* 54. *in quinto, & sic deinceps, ita vt vnitates in quolibet loco positæ sint duplo plures quàm in omnibus præcedentibus locis simul: quod tum demum fiet, si vnitates secundi loci triplices, & productum numerum rursus triplices, atque ita deinceps, vt in hac progressione manifestū est,*

In progressione cuius primus termin⁹ est 1. secūdus 2. tertius vero secundi triplus, & similiter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus est omniū præcedentium terminorum.

1. 2. 6. 18. 54. 162. 487. 1458. 4374. 13122. *&c.*

& ita ostēdi potest. Quoniam vnitates cuiuslibet loci duplæ sunt vnitatum in omnibus præcedentibus locis positarum, continebunt dictæ vnitates bis vnitates proxime antecedentis loci, & vnitates omnium quoque aliorum locorum præcedentium bis. Cum ergo vnitates proxime antecedentis loci bis contineant vnitates omnium locorū antecedentium, comprehendent vnitates proxime antecedentis loci ter. Verbi gratia, quoniam vnitates 18. *in quarto loco duplæ sunt harum vnitatum* 1. 2. 6. *continebunt dictæ vnitates* 18. *bis vnitates* 6. *ac praterea vnitates.* 1. 2. *bis. Quare*

tum

cum vnitates 6. duplæ quoque sint vnitatum 1. 2. cõtinebunt eædem vnitates 18. bis vnitates 6. & insuper semel, nempe vnitates quoque 1. 2. bis; ac proinde si triplicentur vnitates 6. producentur vnitates 18. sequentis loci, quæ triplæ quidẽ sunt vnitatum proxime antecedentis loci, duplæ vero omnium præcedentium locorum. Eademque ratio est in cæteris. Quod si quis, inquã, hac ratione ponat quatrinos, vel grana in dictis 64. locis, reperietur summa multo maior, quàm prius.

Qua arte inueniatur summa 64. terminorũ ab 1. incipientiũ atque ita progredientiũ, vt quilibet duplus sit omniũ antecedentiũ terminorũ

HOC autem modo summa elicietur, etiamsi nõ ponãtur omnes numeri illius progressionis. Quoniam oẽs numeri progrediũtur per proportionem triplam, initio facto à secundo loco; inuestigandus erit numerus loci sexagesimi tertij in proportione tripla, cuius principium est 2. Hic enim numerus inuentus occupabit locum 64. in ludo latrunculorum, atque eo cognito, reperietur summa omnium 63. locorum, vt in prima regula progressionũ Geometricarum docuimus; cui si adijciatur 1. in primo loco dicti ludi posita, habebitur summa omnium 64. locorum. Exẽpli gratia. Positis his quinque terminis, 2. 6. 18. 54. 162. si quintus in se multiplicetur, productusq; per primũ diuidatur, producetur numerus 13122. nono loco ponendus, nempe in duplo maiore loco, minus vnitate, q̃ est locus numeri in se multiplicati, vt in secũda hac regula docuimus. Quòd si rursũ numerus 13122 noni loci in se multiplicetur, productusque per primum, hoc est, per 2. diuidatur, gignetur numerus 86093442. septimodecimo loco ponendus: qui si

rursum

rurſum in ſeipſum multiplicetur, productusque per primum diuidatur, fiet numerus hic ſequens 37060403777703682. *triceſimo tertio loco ponendus: qui rurſum ſi multiplicetur in ſe, productusq́, diuidatur per primũ, procreabitur numerus* 6867367640585024969315698178562, *loco ſexageſimo quinto locandus. Nos autẽ quærimus numerum ſexageſimitertij loci, ad quem inuentus numerus ſexageſimiquinti loci proportionem habet triplæ duplicatam, hoc eſt, noncuplam, ex defin.* 10. *lib.* 5. *Eucl. propterea quòd numeri poſiti in loco ſexageſimotertio, ſexageſimoquarto, & ſexageſimo quinto continuam proportionem triplam habent. Quare ſi numerum inuentum per* 9. *partiamur, reperiemus numerũ hunc ſequentẽ* 763040848953891663257299797618. *loco ſexageſimotertio reponendum.*

DETRACTO iam primo numero 2. *& reſiduo diuiſo per numerum vnitate minorem denominatore proportionis triplæ, nempe per* 2. *Quotiente denique ad numerum inuentum ſexageſimitertij loci adiecto, fiet ſumma omnium ſexagintatrium locorum, cui ſi apponatur* 1. *in primo loco ludi latrunculorum poſita, componetur ſumma omnium* 64. *locorũ dicti ludi hæc ſequẽs.*

1144561273430837494885949696427.

HANC eandem ſummam ita quoque inueniemus. Multiplicetur ſumma trium primorum locorum ludi latrunculorum, quæ eſt 9. *in ſe, fietque ſumma* 81. *duplo plurium locorũ minus vno, hoc eſt, quinque locorum: quæ ſi rurſus in ſe multiplicetur,*

Alia ratiō inueniēdi summā 64 terminorū ab 1. incipiētiū atq; ita progredientium, vt quilibet omniū antecedentiū terminorū sit duplus,

plicetur, fiet eadem ratione summa 6561. *nouem locorum, nempe duplo plurium, quam quinque, minus vno; quæ rursus multiplicata in se producet summam* 43046721, *septemdecim locorum: Hæc iterum in se multiplicata faciet hanc summam* 1853020188851841. *trigintatrium locorum; quæ in se rursum multiplicata, gignet*

3433683820292512484557849089281,

summā sexagintaquinque locorū. Nos autem quærimus summam sexaginta quatuor tantum locorum, quæ in summa inuenta ter continetur. Nam summa quotcunque locorum tripla est summæ omnium locorum præcedentium; propterea quòd numerus vltimi loci, nempe (in dato exemplo) sexagesimi quinti, duplus est omnium præcedentium locorum. Hinc enim fit, vt addita summa omniū præcedentium locorum ad numerum sexagesimi-quinti loci, fiat summa omnium sexagintaquinque locorum, continens nimirum ter summam præcedentium sexagintaquatuor locorum. Quocirca diuisa summa inuenta per 3. *reperietur summa hæc*

Quantum frumentū requiratur vt impleā-tur 64. loca ludi latrunculorū ita vt in primo loco ponatur 1. granum, in secundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps; vt grana subsequentis loci sint du-

1144561273430837494885949696427,

sexaginta quatuor locorum ludi latrunculorum, vt prius.

HAEC omnia grana, si diuidantur per 3456000 *quot vnum Rubium constituunt, efficient Rubios sequentes,*

331180924025126589955425 $\frac{3\ 3\ 2\ 0\ 1}{1\ 2\ 8\ 0\ 0\ 0}$,

ad quos vehēdos, impositis 3000. *Rubijs in quamlibet*

libet nauem, neceſſariæ ſunt naues numero 1103936413417088633 1 $8\frac{19}{40}$. quæ 102714380. globos ex terra & aqua confectos contegerẽt. Ponimus enim ſupremam areã vnius nauis æquiualere quadrato, cuius latus continet 70. palmos, quibus Mechanici, atq; Architecti vtuntur: cũ plerunq; longitudo nauis ſit 120. palmorũ, latitudo autẽ 40. ſi ad parallelogrammum rectangulum redigeretur; atq; adeo area ipſius contineat palmos quadratos 4800. cuius radix quadrata fere eſt 70. Cum ergo 5500. palmi, plus minus, conficiant vnum milliare, ac propterea palmi 133750000. milliaria 22500. quot in toto ambitu terræ continentur; ſi partiamur hos palmos per 70. hoc eſt, per latitudinem, longitudinemue unius nauis quadratæ, reperiemus in toto ambitu terræ cõtineri naues 1910714. ſe inuicem tangentes. Eodem modo conficiunt palmi 39374500. totam terræ diametrum milliaria 7159. complectentem: quos palmos ſi rurſus per 70. partiamur, inueniemus in terræ diametro cõprehendi naues ſe inuicem tangentes 562493. ferè. Multiplicantes autem naues 562493. diametri per 1910714. naues ambitus, faciemus naues 1074763250002. totam ſuperficiẽ terræ mariſque tegentes, vt ad finem primi cap. ſphæræ ſcripſimus: per quas ſi diuidamus illas ſuperiores 1103936413417088631 8. naues, quæ ad frumentum aſportandũ requiruntur, deprehẽdemus globos ex terra mariq́; cõfectos 102714380. & quidem oẽs nauibus ad frumentum portandum

pla omniũ granorum in præcedẽtibus omnibus locis ſimul. Et quot naues neceſſariæ, ſint ad illud frumẽtum portandum.

Quot naues totam ſuperficiẽ terræ & maris operirent, ſi ſe mutuo tangerent.

ne-

Quot globi ex terra ac mari confecti tegerétur à nauibus, quæ neceſſariç sűt ad ꝓximè dictű frumentum portandű.

neceſſarÿs contectos: quæ ſumma frumenti multis partibus ſuperat frumentum totius orbis, cum ne vnam quidem terram operire poſſint naues, in quibus totius orbis frumentum contineretur, vt patet.

ALIA ratione incomprehenſibilem hanc multitudinem frumenti explicabimus, ſi nimirũ inquiramus, quot globi, ſiue ſphæræ ex illis granis, quæ poſteriori modo in 64. locis ludi latrunculorum continentur, confici poſſint, quarũ ſphærarũ quælibet globo terreſtri ſit æqualis: quod ita fiet. Quoniam granã frumenti rotunda non ſunt, ſumemus pro ipſis grana coryandri, quæ rotunda ſunt, licet paulo minora ſint, quàm frumenti granã. Ita enim fiet, vt plures globi conficiantur ex granis frumenti, quàm ex granis coryandri, cum pauciora illorum requirantur, quàm horum, ad vnum globum conſtituendum, ſitque tanta multitudo illorum, quanta horum, in 64. locis ludi latrunculorum. Quia igitur 18. grana coryandri (vt experientia deprẽhenſum eſt à me) conſtituũt quartam partem pedis Geometrici, & paulo amplius, fit, vt recte dicere poſſimus, 70. grana ſecundum longitudinem diſpoſita explere longitudinem vnius pedis. Quare cum ſphæræ triplicatam ſuarum diametrorum proportionem habeãt, vt Euclides demonſtrauit lib. 12. propos. 18. continebuntur in ſphæra, cuius diameter pedi Geometrico æqualis eſt, grana coryandri 343000. cum hic numerus ad 1. proportionem habeat triplicatam eius, quam habet pes Geometricus

70.

70.granorum ad 1.vt hic apparet.

1. 70. 4900. 343000.

RVRSVS *quia 5000. pedes Geometrici vnum milliare constituunt, habebit eadē ratione sphæra, cuius diameter vni milliario, æqualis sit ad sphæram, cuius diameter æqualis sit vni pedi, proportionem, quam ad 1. habet hic numerus 125000000000. cum numerus hic ad 1. habeat proportionem triplicatam eius, quam 5000. pedes habent ad 1. vt hic vides.*

1. 5000. 25000000. 125000000000.

Quare cum sphæra habens diametrum pedalem contineat grana coryandri 343000. existent in sphæra, cuius diameter vni milliario sit æqualis, grana 42875000000000000.

DEINDE *quoniam diameter terræ complectitur milliaria 7159. ponamus nos eam continere 7200. milliaria. Quo posito, habebit tota sphæra terræ ad sphæram, cuius diameter vni milliari est æqualis, proportionem, quam hic numerus 373248000000. ad 1. propterea quod numerus hic ad 1. proportionem habet triplicatā eius, quam habent 7200. milliaria totius diametri terræ ad 1. milliare, vt hic manifestum est.*

1. 7200. 51840000. 373248000000.

Quot globos toti terræ æquales conſtitueret frumentum in 64. locis proxime dictis contentum.

Quocirca cum ſphæra diametri vnius milliarij comprehendat grana 4287 5000000000000. *complectetur totus globus terræ grana numero* 16003008000000000000000000. *Si igitur per hunc numerum partiamur numerum granorum omnium in illis* 64. *locis ludi latrunculorum contentum, efficiemus globos terræ* $71\frac{1}{2}$. *& amplius. Tot ergo ſphæræ, quarum qualibet toti terræ ſit æqualis, requiruntur ex granis coryãdri compoſitæ, vt dicta* 64. *loca repleri poſſint eo modo, quo diximus, quod omnium fidem ſuperare videtur.*

Quot naues ferrent aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo, quo de granis frumenti dictum eſt. Et quot globos terræ ac maris dictæ naues tegerent.

I A M vero ſi grana illa ſint quatrini, efficiemus ex illis aureos ducatos ſequentes, numero 2488176681371385858584477167 31. *Quoniam autem ſupra diximus, vnam nauem cõmode ferre ducatos aureos* 180000000. *ſi illos per hos diuidamus, deprehendemus naues has* 1382320378 5396588103 24. *neceſſarias eſſe, vt dictam pecuniam ferrent, quæ tot ſuperficies terræ mariſque contegerent, quot ſunt in hoc numero* 128616 2676. *vnitates; propterea quòd ſupra poſuimus* 107476325000 1. *naues vnam ſuperficiem terræ ac maris contegere. Quæ ſumma pecuniæ omnem captum ingenij humani excedit.*

Qua ratione facile inueniatur ſumma 40 terminorũ progreſſionis Geometricæ proportionis duplę ab 1. incipientis.

P A R I ratione, ſi quis optet ſummam 40. *terminorum eiuſdem progreſſionis, accipiẽda primum erit ſumma horũ* 5. *terminorũ* 1.2.4.8.16. *nempe* 31. *Deinde, addita* 1. *multiplicandum aggregatum* 32. *in ſe, abiecta enim vnitate ex pro-*

producto numero, fiet ſumma 10. terminorum 1023. Rurſus, addita 1. ſi aggregatum multiplicetur in ſe, & ex producto numero reijciatur 1. exurget ſumma 20. terminorum 1048575. Poſtremo, addita rurſus 1. ſi aggregatum in ſeipſum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. producetur ſumma 40. terminorum, videlicet 1099511627775. Atque tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40. oppida ſua ea lege diuēderet, vt ei pro primo ſolueretur 1. quatrinus, pro ſecundo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps progrediendo ſemper per proportionem duplam. Hi autem quatrini conficiunt aureos 2748779069 $\frac{175}{400}$. Quòd ſi hac pecunia emerentur redditus annui, ita vt 100. aurei tantum lucrifacerent 5. aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrentur) haberentur aurei bis 137438953. & baioch. 47 $\frac{3}{16}$. quantos redditus nullus vnquā Monarcha, aut Reſp. habuit: vt non inſanus iudicandus ſit Dux ille, (vt pleriſque, qui in Arithmeticis parum ſunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. ſua oppida diuēdit, ſed ſapientiſsimus.

Quanti coſtēt 40. oppida, ſi venderētur, ita, vt pro primo ſoluatur 1. quatr. pro ſecū do 2. quatri. p tertio 4. &c.

POSTREMO *ſi quis cupiat expedite ſummam habere 24. terminorū eiuſdem progreſſionis, ſumenda erit primum ſumma trium horū terminorum 1. 2. 4. quæ eſt 7. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum in ſe, & à producto numero auferenda 1. vt habeatur ſumma 6. terminorum 63. Addita rurſus 1. multiplicandum aggregatum in ſe, & auferenda 1. ex numero pro-*

Quo modo breuiter elicia tur sūma 24. terminorū progreſſionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1. incipientis.

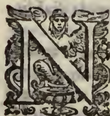
Quanti cõ ftet equus habés 24. clauos in pedibus, fi ita vendat, vt detur 1. quatri. pro primo clauo, & 2. pro fecundo, & 4. pro tertio, &c.

ducto, vt fiat summa 12. terminorum 4095. Tandem, addita rursus 1. multiplicandum aggregatum in se, & 1. subducenda e x numero procreato, vt exurgat summa 24. terminorum 16777215. Non ergo ridendus esset, qui bellicosum equum, qui in pedibus habet 24. clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215. quatr. qui conficiunt 41943 $\frac{3}{2}\frac{}{5}$. *aur. pro quo pretio vnusquisque libenter suum equum daret. Hęc pauca de progressionibus dicta sint satis. Multo enim plura de eisdem scribemus in pleniore nostra Arithmetica.*

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

Cap. XXVI.

Quadratus numerus quid.



VMERVS quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in seipsum multiplicato producitur. qualis est 4. qui ex multiplicatione numeri 2. in seipsum gignitur. Item 9. cum ex 3. in se producatur. Itẽ 2209. quia generatur ex multiplicatione 47. in se, &c. Vnitas quoque ab Arithmeticis numerus quadratus, licet improprie, appellatur, propterea quòd ex 1. in se producatur.

Nume-

Numerus autem, qui in se multiplicatus, producit quadratum numerum, vocatur latus, siue radix quadrati. Radix quadrata quid

EXTRACTIO *igitur radicis quadratæ est inuentio numeri, qui in se multiplicatus producat numerum propositum, si quadratus est, vel, si non est quadratus, maximum numerũ quadratũ in eo contentũ. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. est inuentio numeri 47. quia hic in se multiplicatus producit propositũ numerũ 2209. Itẽ extractio radicis quadratæ ex numero 3375. est inuentio numeri 58. quia hic in se multiplicatus gignit numerũ quadratũ 3364. qui est omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, siue radix est 59. vna vnitate maior, quàm 58. est 3481.* Extractio radicis quadratæ qd.

PRIMVM *autem numerus propositus, cuius radix inuestiganda est, signandus est punctis quibusdã, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra primam figuram, & alio sub tertia, & alio sub quinta, & ita deinceps sub septima, nona, & sub alijs locis imparibus: ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, sub qua punctum signatum est, & aliam, quæ hanc versus sinistram pręcedit; excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum est impar. Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signata sunt. Vt hic numerus 2117404. ita signabitur, habe-* Quomodo numerus, cuius radix quęritur, punctis sit signandus. Quot figuras habeat radix propositi numeri.

bitque eius radix quatuor omnino figuras. Hic autem numerus 456789012. ita signabit, eiusq́; radix 5. figuris scribetur.

Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

SIGNATO hac ratione numero, ita radix ipsius eruetur. Sub vltimo puncto ad sinistrã ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum spectantibus cõtenti, quæ maior esse non potest, quam 9. eademque radix scribitur ad dexteram numeri propositi post hanc lineam curuam (. vt de diuisione integrorum numerorũ diximus: atque hæc radix, instar Quotientis figuræ, per radicem sub puncto positam, instar diuisoris, multiplicatur, productusque numerus ex suprascripto numero subtrahitur, deletis prius figuris, à quibus fit subtractio, vna cum radice sub puncto notata, quemadmodum in diuisione integrorum docuimus. Numerus autem residuus non potest esse maior, quàm duplus radicis sub puncto positæ.

POST hæc duplicatur radix inuenta, scriturque numerus hic duplicatus sub sequenti pũcto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur sub figura, quæ proxime punctum vltimum sequitur versus dextram, aliæ vero, si quæ sint, ordine suo versus sinistram progrediendo, ita vt sub figura, sub qua sequẽs punctum ponitur, nihil scribatur. Sub ea enim ponenda est noua figura Quotientis. Posito hac ratione numero illo duplicato, diuiditur per illam numerus suprascriptus, Quotiẽtisque figura ad dexteram post propositum numerum scribitur, atque etiam sub puncto, vt fiat

quasi

quasi integer diuisor ex duplicato illo numero, & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hæc Quotientis in totum illum diuisorem, vt in diuisione integrorum, productusque numerus ex suprascripto numero subducitur, &c. Antequam autem figuram hanc nouam Quotientis scribas, tentandum prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in seipsam positam post illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à suprapositio numero possit subtrahi.

RVRSVS *eodem modo totus numerus post lineam hanc curuam (hactenus positus duplicatur, duplicatusque numerus sub sequenti puncto scribitur eo ordine, quem supra præscripsimus, ita vt rursus sequens punctum vacuum relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hunc numerum vero duplicatũ diuiditur suprascriptus numerus, sumiturque talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in seipsam post illum numerum duplicatum positam multiplicata, numerum procreet, qui ex suprascripto numero detrahi possit.*

PARI *ratione totus numerus in Quotiente hactenus positus duplicatur, & reliqua fiunt, vt prius: atque ita deinceps, donec omnia puncta sint absoluta. Verum hæc omnia exemplis fient clariora.*

SIT *eruenda radix quadrata ex numero 21178404. Notatis punctis, vt supra dictum est, pono sub vltimo puncto ad sinistram figuram*

4. tanquam radicē maximi quadrati in suprascripto numero 21. contenti, (quadratus enim numerus maio ris radicis, nempe 5. est 25)

```
    5
21178404(46
 .  .  .  .
   486
```

eamq́; rursus scribo post lineā hāc curuam (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figuram 4. sub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. sublata, vt in diuisione integrorū præcepimus, relinquunt 5. spectabuntque ad sequens punctum tres hæ figuræ 517.

DEINDE duplicata figura Quotientis 4. vt fiant 8. scribo 8. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoque 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. sexies. Pono ergo 6. tam in Quotiente post 4. quàm sub puncto figuræ 7. Multiplicata autem figura hac Quotientis 6. per totum diuisorē 86. productoque detracto ex suprapposito numero 517. remanet 1. pertinebuntque hæ tres figuræ 184. ad sequens punctum.

```
   511
21178404 (460
 .  .  .  .
  48620
     9
```

RVRSVS duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. scribo 2. sub 8. & 9. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoque 18. per 92. Sed quia 92. non continentur in 18. pono 0. in Quotiente, & sub

```
   511
21178404 (4602
 .  .  .  .
  48620 02
    692
```

puncto

puncto figuræ 4. deleoque totum diuisorem 920. spectabit autem ad postremum pũctum totus hic numerus 18404.

POSTREMO *duplicato Quotiente 460. hactenus inuento, vt fiant 920. scribo 0. sub 0. & 2. sub 4. & 9. sub 8. vt vides in exemplo.*

```
      831
  21178404 (4602
  4892002
     992
```

Diuidendo autem 1840. per 920. inuenio hunc numerum in illo contineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam sub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 4. per totũ diuisorẽ 9202. productoque numero dempto ex numero suprascripto, nihil superest. Radix ergo quadrata numeri propositi est 4602. ipseque numerus propositus quadratus est, cũ nihil superfuerit post vltimam subtractionem factam.

SIT *rursus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, scribo sub vltimo puncto ad sinistram figuram 2. tanquã radicem maximi quadrati in suprascripto numero 4. cõtenti, eamque rursus pono in Quotiente.*

```
  456789012 (21
  241
```

Multiplicata autem figura 2. in Quotiẽte per figuram 2. sub puncto, fiunt 4. quæ ex 4. subducta nihil relinquunt, pertinebuntque hæ duæ figuræ 56. ad punctum sequens.

DVPLICATA *figura Quotientis 2. fiunt 4. quæ scribo sub 5. relicto puncto sequenti*

vacuo

vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidendo autem 5. per 4. inuenio Quotientem 1. quem ſcribo tam poſt Quotienem 2. quam ſub puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuiſorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad ſequens punctum ſpectent quatuor hæ figuræ 1578.

```
 15
45678901 2 (213
·  ·  ·  ·  ·
24123
  4
```

DEINDE duplicato Quotiente 21. hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. ſub 7. & 4. ſub 5. Diuidendo autẽ 157. per 42. reperio Quotiẽtem 3. quem pono & in Quotiente, & ſub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuiſorem 423. ſubtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad ſequens punctum quinque iſtæ figuræ 30990.

```
   30
  1519
456789012(2137
·  ·  ·  ·  ·
2412267
  442
```

RVRSVS duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. ſcribo 6. ſub 9. & 2. ſub 9. & 4. ſub 0. Diuidendo autem 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quem ſcribo tam in Quotiente, quàm ſub puncto figuræ 0. Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuiſo-

diuisorem 4267. detractoque producto numero ex 30990. remanent 1121. atque adeo ad punctum sequens pertinebunt sex hæ figuræ 112112.

```
       1
      21
     3082
    181071
  45678901 2(21372
  .  .  .  .  .
  2412307 42
     44227
       4
```

POSTREMO *duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. sub 1. & 7. sub 1. & 2. sub 2. & 4. sub 1. Diuidendo autem 11211. per 4274. reperio Quotientem 2. quem scribo & in Quotiente, & sub puncto figuræ 2. Multiplicata autẽ hac Quotientis figura 2. per totum diuisorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. supersunt 26628. Numerus ergo propositus quadratus nõ est, ac proinde Quotiens*

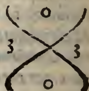
```
        2
       136
      2186
     308272
    18109718 8
  45678901 2(21372
  .  .  .  .  .
  2412307 42
     44227
       4
```

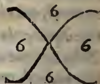
inuentus 21372. non est eius radix, sed alterius numeri, qui est maximus quadratus in dato numero cõprehensus, qualis est numerus 456762384. Nã proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicẽ vna vnitate maiorem radice inuenta 21372. constituit numerum maiorem proposito numero.

EXA-

Examen extractionis radicis quadratæ triplex.

EXAMEN extractionis radicis quadratæ triplex est, quemadmodum & diuisionis integrorum. Primum enim fit per abiectionem 9. alterum per abiectionem 7. & tertium per multiplicationem, vt in diuisione integrorum dictum est. Sed radix inuenta accipienda est hic loco diuisoris: quia si numerus propositus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et si quid superfuerit in extractione radicis, idem supererit in diuisione, dummodo in Quotiente sumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuisione partiali maior aliquando figura sumi posset, quando nimirum residuum extractionis radicem excesserit. Itaque prius exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 4602. remanent 3. quæ in vtroque latere crucis scribo, propterea quòd radix est & diuisor, & Quotiens, vt diximus. Multiplicatis iam inter se duabus hisce figuris 3. & 3. fiunt 9. reiectisque 9. remanet 0. in superiori parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9. ex proposito numero, remanet etiam 0. Posterius autem exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 21372. remanent 6. in vtroque latere crucis ponenda. Multiplicatis autem inter se hisce figuris 6. & 6. fiũt 36. reiectisq; 9. ex 36. & ex residuo extractionis, supersunt 6. Tantundem remanet,





manet, si reijciantur 9. ex dato numero.

QVOD si multiplicetur radix prioris numeri in se, producetur idem numerus prior. Item si radix numeri posterioris in se multiplicetur, productoq́; numero addatur residuum extractionis, gignetur idem numerus posterior.

OBITER etiam hic aduertendum est, in nulla extractione radicis quadratæ residuum, si quod est maius esse posse, quàm duplum radicis inuentæ. Si enim superaret duplum radicis inuentæ vel vna vnitate, haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio huius rei est, quòd quilibet quadratus superat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipsius minoris quadrati, & insuper vna vnitate; adeo vt, si addatur 1. ad duplum radicis cuiusuis quadrati, & hoc aggregatum ad quadratum proxime minorē, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64. superat numerum quadratum 49. numero 15. Constat autem, numerum 14. duplum esse radicis quadrati 49. quæ est 7. superesseq́; vnam adhuc vnitatem in 15. ac proinde, si addatur 1. ad 14. duplum radicis 7. & hoc aggregatum ad 49. fieri quadratum numerum 64. proxime maiorem, quàm 49. cuius radix est 7. Si igitur proponat quis numerum 63. vt eius radix quadrata eruatur, reperietur radix 7. supereruntq́; 14. quæ radicis sunt dupla: Si vero quis proponeret numerū 64. inueniretur q́; radix 7. erratum esset, quia superessent 15. quæ maiora sunt, quàm duplum radicis

Residuum in extractione quadratæ radicis maius esse non potest, quam duplū radicis inuentæ.

Quæ sit differentia inter duos quadratos proximos.

cis

cis 7. Quare radix numeri 64. erit 8.

APPROPINQVATIO RADIcum in numeris non quadratis. Cap. XXVII.

QVONIAM cum numerus propositus non est quadratus, inuenta radix in se multiplicata producit numerum minorem numero ipso, quemadmodum in posteriori exemplo patuit, vbi radix in se multiplicata gignit numerum, qui à numero proposito superatur toto hoc numero 2 6 6 2 8. monstrabimus hoc loco duplicem viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à proposito numero non quadrato insensibili fere differentia distet. Vera enim radix numero exprimi non potest, sed solum per lineam, vt in pleniore nostra Arithmetica demonstrabitur. Priori via reperietur radix propinquior quidem in infinitum, sed tamen minor, quam vera; adeo vt eius quadratus numerus semper a numero proposito superetur. Posteriori via inuenietur radix propinquior quoque in infinitum, sed quæ veram excedat; ita vt eius numerus quadratus maior semper sit numero proposito. Vtraque porrò via demonstrata est Geometrice & à Theone Alexandrino in lib. 1. Almagesti Ptolemæi, & à Federico Commandino in lib. Archimedis de dimensione circuli.

Quo modo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor sit, quam vera

PRIOR ergo via ita se habet. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero comprehensi,

henſi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ, & præterea vnitas, qua nimirum radix numeri quadrati, qui proxime maior eſt propoſito numero, ſuperat radicem inuẽtam numeri quadrati, qui proxime minor eſt numero propoſito. Hac enim ratione compoſita erit radix multo propinquior, quam inuenta, minor tamen, quam vera. Ad quam ſi addatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus excedit quadratum radicis propinquioris iam inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem radicis propinquioris, & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris ſuperat radicẽ propinquiorem inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamen, quam vera. Ad quam ſi iterum apponatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus ſuperat quadratum radicis propinquæ vltimo loco inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem vltimæ radicis propinquæ, & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris excedit radicem eandem vltimam propinquam, efficietur adhuc propinquior radix, minor tamen, quam vera. Atq; hoc modo licebit ſemper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, ſed ſemper radix aliquanto minor, quam vera.

EXEM-

EXEMPLVM. *Sit propoſitus numerus non quadratus 20, Radix quadrati proxime minoris eſt 4, quæ in ſe multiplicata producit 16. ſuperſuntque 4, Si ergo ad radicem 4. addatur fractio $\frac{4}{9}$. cuius numerator eſt reſiduum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4, & preterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numerus eſt $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. qui minor quidē eſt, quā propoſitus numerus 20. ſed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16, radicis primæ 4.*

ABLATO *hoc quadrato $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. ex numero propoſito non quadrato 20. ſuperſunt $\frac{2}{8}\frac{0}{1}$. Item radix 5, quadrati proxime maioris numero propoſito, excedit radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam hac minutia $\frac{5}{9}$. quæ addita ad duplum radicis propinquæ $4\frac{4}{9}$. hoc eſt, ad $8\frac{8}{9}$. facit numerum $9\frac{4}{9}$. per quem ſi diuidatur reſiduū illud $\frac{2}{8}\frac{0}{1}$. fiet Quotiens $\frac{1}{6}\frac{8}{8}\frac{0}{8}\frac{}{5}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam faciet radicem propinquiorem $4\frac{2}{6}\frac{9}{1}\frac{1}{9}\frac{6}{6}\frac{0}{5}$. hoc eſt, $4\frac{}{1}\frac{8}{7}$. Huius enim numerus quadratus eſt $19\frac{2}{2}\frac{8}{8}\frac{5}{9}$. qui minor quoque eſt, quam numerus propoſitus 20. non quadratus, ſed magis ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. radicis $4\frac{4}{9}$. ante hanc radicem $4\frac{}{1}\frac{8}{7}$. inuentæ.*

RVRSVS *ſubtracto hoc quadrato numero $19\frac{2}{2}\frac{8}{8}\frac{5}{9}$. ex propoſito numero 20. nō quadrato, ſuperſunt $\frac{}{2}\frac{4}{8}\frac{}{9}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero propoſito excedit radicem propinquam $4\frac{}{1}\frac{8}{7}$. vltimo inuētam minutia hac $\frac{}{1}\frac{8}{7}$. quæ addita ad duplū vltimæ radicis propinquæ*

pinquæ $4\frac{8}{17}$. *hoc eſt, ad* $8\frac{16}{17}$. *facit numerum* $9\frac{8}{17}$. *per quē ſi diuidatur reſiduū illud* $\frac{4}{289}$. *fiet Quotiēs* $\frac{68}{46529}$. *qui additus ad radicem propinquā* $4\frac{8}{17}$. *vltimo inuentā facit radicem propinquiorem* $4\frac{373388}{790993}$. *hoc eſt,* $4\frac{76}{161}$. *Huius enim numer⁹ quadratus eſt* $19\frac{25901}{25921}$. *qui minor quoq; eſt ꝓpoſito numero 20. nō quadrato, magis tn̄ ad eum accedit, quam quadratus* $19\frac{285}{289}$. *radicis ꝓpinquæ* $4\frac{8}{17}$. *ante hāc radicē* $4\frac{76}{161}$. *inuētæ. Atq; in hūc modū licebit ſemper magis ac magis ad veritatē accedere, ad quā tn̄ nunquā ꝑueniemus, ſed ſemꝑ ab ea deficiemus.*

Quo modo repetiatur radix propinquior, q̄ tamen maior ſit, q̄ vera.

POSTERIOR *autem via hæc eſt. Inuenta radice maximi quadrati in propoſito numero comprehenſi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior, quam inuenta, maior tamen, quā vera. A qua ſi auferatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuentæ excedit numerum propoſitum, per duplum eiuſdem radicis propinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua ſi rurſus detrahatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuētæ ſuperat numerū propoſitum, per duplum eiuſdē radicis vltimæ propinquæ, remanebit*

manebit adhuc propinquior radix, maior tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorē in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, sed semper radix aliquanto maior, quam vera.

EXEMPLVM. *Sit propositus idem numerus non quadratus* 20. *Radix quadrati proxime minoris est* 4. *quæ in se multiplicata facit* 16. *supersuntque* 4. *Si ergo ad radicem* 4. *adijciatur fractio* $\frac{4}{8}$. *cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis* 4. *fiet propinquior radix* $4\frac{4}{8}$. *hoc est,* $4\frac{1}{2}$. *Huius enim numerus quadratus est* $20\frac{1}{4}$. *qui maior quidē est, quā propositus numerus* 20. *sed minus ab eo differt, quā quadratus numerus* 16. *radicis primæ* 4.

IAM *vero, si* $\frac{1}{4}$. *excessus nimirum, quo numerus quadratus* $20\frac{1}{4}$. *radicis* $4\frac{1}{2}$. *proxime inuentę superat numerum propositum* 20. *diuidatur per duplum radicis propinquæ* $4\frac{1}{2}$. *iam inuentæ, hoc est, per* 9. *fiet Quotiens* $\frac{1}{36}$. *qui ablatus ex radice* $4\frac{1}{2}$. *proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem* $4\frac{34}{72}$. *hoc est,* $4\frac{17}{36}$. *Huius enim numerus quadratus est* $20\frac{1}{1296}$. *qui maior quoque est numero proposito* 20. *sed minus ab eo distat, quam quadratus* $20\frac{1}{4}$. *radicis* $4\frac{1}{2}$. *ante hanc inuentæ.*

QVOD *si rursus* $\frac{1}{1296}$. *excessus nimirum, quo numer⁹ quadratus* $20\frac{1}{1296}$. *radicis* $4\frac{17}{36}$. *proxime inuentæ superat propositum numerum* 20. *diuidatur per duplum radicis* $4\frac{17}{36}$. *iam inuentæ, id est, per* $8\frac{34}{36}$. *hoc est per* $8\frac{17}{18}$.

fiet

fiet Quotiens $\frac{\ }{1}\frac{1}{1}\frac{\ }{5}\frac{\ }{9}\frac{\ }{2}$. *qui ſubductus ex radice* $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$. *proxime inuenta relinquet radicẽ propinquiorẽ* $4\frac{1}{4}\frac{9}{1}\frac{7}{7}\frac{0}{3}\frac{2}{1}\frac{8}{2}$. *hoc eſt,* $4\frac{\ }{3}\frac{5}{1}\frac{4}{5}\frac{7}{9}\frac{1}{2}$. *Huius enim quadratus numerus eſt ſequens* $20\frac{\ }{1}\frac{\ }{3}\frac{\ }{4}\frac{1}{3}\frac{\ }{7}\frac{\ }{4}\frac{\ }{4}\frac{\ }{6}\frac{\ }{4}$. *qui maior etiam eſt numero propoſito 20. ſed minus ab eo diſtat, quam quadratus* $20\frac{\ }{1}\frac{1}{2}\frac{\ }{9}\frac{\ }{6}$. *radicis* $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$. *ante hăc inuentæ. Atque in hunc modum licebit ſemper magis ac magis accedere ad veritatem, ad quam tamen nunquam perueniemus, ſed ſemper eam excedemus.*

AGENDVM iam eſſet de extractione radicis cubicæ, & aliarum radicum, quæ infinitæ ſunt; ſed quoniam tractatio hæc difficilior eſt, inuentioq́ue radicis quadratæ magis eſt neceſſaria ad libros Archimedis, Ptolemæi, cæterorumq́ue Mathematicorum intelligendos, conſulto à nobis in pleniorem noſtram Arithmeticam differtur. In ea namque non ſolum omnes radices, cum earum appropinquatione tractabimus, ſed innumera alia, à quibus in hoc compendio dedita opera abſtinuimus, exponemus.

F I N I S.

ERRATORVM CORRECTIO.

Pag.	lin.	Errata.	Correctiones
11.	4.	ſi.	ſic.
16.	4.	quòd.	quor.
41.	1.	numeri	figuræ
50.	6.	dictio	[lineã] abũdat
59.	3.	dictio	[ex] abũdat
86.	15.	dictio	[minutię] abũdat
90.	7.	diuidimus.	diuidemus
144.	20.	pro. 12.	per 12.
152.	6.	ſtabunt.	ſtabit.
157.	27.	enim.	enim.

Pag.	lin.	Errata.	Correctiones.
230.	4.	pro 5.	per 5.
238.	antep.	p diuiſore.	p diuiſore.
298.	3.	53375438365.	533759955836 5.
299.	4.	Ex fit.	Ex quo fit.
16:.	2.	ita legatur exemplum, Lib. Aurei.	Lib. Aurei.
200.	4.	3 90?	6.

INDEX OMNIVM Capitum huius Arithmeticæ.

INDEX

INDEX EORVM, QVAE in singulis capitibus continentur.

IN PRAEFATIONE.

IN NVMERATIONE Integrorum numerorum.

IN ADDITIONE Integrorum numerorum.

IN NVMERATIONE *fractorum numerorum.*

IN

IN DIVISIONE *fractorum numerorum.*

IN INSITIONE *fractorum numerorum.*

IN QVAESTIVNCVLIS nonnullis numerorum integrorum, ac minutiarum.

IN REGVLA TRIVM, *quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet.*

De-

Quo

Quan-

FINIS.

REGESTVM.

ABCDEFGHIKLMNOPQRSTVX.

Omnes sunt Quaterniones.

